LAS ECUACIONES DE FERMAT Y CATALAN EN $K[t]$ (*)

VÍCTOR S. ALBIS GONZÁLEZ (†)

Universidad Nacional de Colombia

Recientemente N. Greenleaf [1] publicó una demostración algebraica de la imposibilidad de la ecuación de Fermat

$$X^n + Y^n + Z^n = 0 \,, \quad n \geq 3 \tag{1}$$

en el anillo $\mathbb{C}[t]$; es decir, mostró que (1) no posee soluciones X, Y, $Z \in \mathbb{C}[t]$ si requerimos que X, Y, Z sean polinomios no constantes que satisfagan $(X,Y) = (X,Z) = (Y,Z) = 1$, donde (P,Q) designa al máximo común divisor de dos polinomios $P, Q \in \mathbb{C}[t]$. Más tarde. M. B. Nathanson [3] mostró que el resultado de Greenleaf conservaba su validez si en vez de $\mathbb{C}$ tomábamos un cuerpo arbitrario K cuya característica no dividiera al exponente n que figura en la ecuación (1). Este resultado es el óptimo, como lo muestran las soluciones $X(t) = t+1$, $Y(t) = t-1$, y $Z(t) = t$ de la ecuación $X^3+Y^3+Z^3 = 0$ en $K[t]$ donde K es un cuerpo arbitrario de característica 3.

Sin embargo, hace casi un siglo, Korkine [2] dio una demostración que, manteniéndose algebraica, es mucho más elemental y elegante en característica 0 que la de Greenleaf, pudiéndose incluir fácilmente en un primer curso de álgebra abstracta. Por otra parte, en [3] , Nathanson da además una demostración de que la ecuación de Catalan

$$X^n - Y^s = 1 \tag{2}$$

no tiene soluciones no constantes en $K[t]$ si $n, s > 1$ y la característica de K, no divide estos exponentes. El objetivo de este trabajo es demostrar estos hechos usando las ideas de Korkine, al parecer hasta hoy olvidadas.

Supongamos, pues, que (1) admite las soluciones $X(t)$, $Y(t)$, $Z(t) \in K[t]$ y que éstas satisfacen las condiciones requeridas. Sin pérdida sustancial de la generalidad, podemos asumir que

$$m = \text{grado } Z(t) \geq \text{grado } X(t), \ \text{grado } Y(t);$$

(*) Este trabajo fue expuesto en el "Seminario de Temas Diversos" del Departamento de Matemáticas y Estadística de la Universidad Nacional de Colombia, segundo semestre de 1975

† Publicado en el *Boletín de Matemáticas*, **9** (1975), 217–220

pero entonces es necesario tener, por ejemplo, que $m =$ grado $Z(t) =$ grado $Y(t)$ y, por consiguiente, que grado $X(t) = m - r$, con ≥ 0. Si escribimos

$$\left(\frac{Y}{X}\right)^n + \left(\frac{Z}{X}\right)^n + 1 = 0 ,$$

y tomamos derivadas con respecto a t, obtenemos

$$0 = n\left(\frac{Y}{X}\right)^{n-1} \frac{XY' - YX'}{X^2} + n\left(\frac{Z}{X}\right)^{n-1} \frac{XZ' - ZX'}{X^2} ;$$

como la característica de K , por hipótesis, no divide a n, podemos escribir

$$Y^{n-1}(XY' - YX') = Z^{n-1}(ZX' - XZ') .$$

Sostenemos ahora que $XY' - YX' \neq 0$, pues de lo contrario tendríamos $ZX' - XZ' = 0$, y, por ende,

$$X \mid X' , \quad Y \mid Y' , \quad Z \mid Z' ,$$

puesto que $(X, Y) = (X, Z) = 1$. A partir de este momento, es conveniente empezar a distinguir cuándo el cuerpo K tiene característica cero o característica $p > 0$, donde p es un número primo.

Caso 1 . K it tiene característica 0. En este caso las relaciones (4) dicen que X, Y, Z son polinomios constantes, lo cual es contrario a lo supuesto. Luego $XY' - YX'$ y $ZX' - XZ'$ son polinomios no nulos. Usando que $(Y, Z) = 1$, de (3) resulta que

$$\frac{XY' - YX'}{Z^{n-1}} \quad \text{y} \quad \frac{ZX' - XZ'}{Y^{n-1}}$$

son también polinomios no nulos y que, por consiguiente,

$$\text{grado } Z^{n-1} = \text{grado } Y^{n-1} = m(n-1) \geq \text{grado}(XY' - YX'), \text{grado}(ZX' - XZ') .$$

Como

$$\text{grado } (XY' - YX'), \quad \text{grado } (ZX' - XZ') \geq 2m - 1 ,$$

deducimos de estas desigualdades la $2m - r - 1 \geq m(n-1)$, o, equivalentemente, $m(3 - n) \geq r + 1 > 0$, la cual a su vez implica que $3 > n$; esto, claramente, es contrario al supuesto inicial $n \geq 3$.

Caso II. K *tiene característica* $p > 0$. Aquí, si $XY' - YX' \neq 0$, continuamos como en el caso I. Pero si $XY' - YX' = 0$, las relaciones (4) indican que X,Y, $Z \in K[t^p]$; haciendo $T_1 = t^p$, consideremos los polinomios en cuestión como elementos de $K[T_1]$, y repitamos los argumentos anteriores, tomando ahora las derivadas con respecto a T_1. Si $XY' - YX' \neq 0$, continuamos como en el Caso I, para mostrar que (1) no tiene soluciones en $K[T_1]$; pero es claro que entonces X, Y, Z no pueden ser soluciones en $K[t]$. Si ocurre que $XY' - YX' = 0$ en $K[T_1]$, entonces, como antes, X, Y, $Z \in KT_2$, donde $T_2 = T_1^p$, y repetimos la argumentación anterior tomando esta vez las derivadas con respecto a T_2. Por recurrencia, debemos llegar a la siguiente situación :

$$X, Y, Z \in K[T_k] \ ;$$
$$m - r = p^k u \leq m \ , p \nmid u \ ,$$

y es claro que entonces $dX)/dT_k = X' \neq 0$. Pero en estas circunstancias, $XY' - YX' \neq 0$, pues de lo contrario, $X \mid X'$ (por las relaciones (4)) y, por consiguiente, $X' = 0$, ya que X no es constante. Podemos pues concluir, como en el Caso 1, que X, Y, Z no son soluciones de (1) en $K[T_k]$, y finalmente que tampoco lo son en $K[t]$.

Veamos, para terminar, que la ecuación de Catalan (2) no tiene soluciones no constantes en $K[t]$ si $n, s > 1$ y la característica de K no divide a estos exponentes. En efecto, derivando (2) con respecto a t, obtenemos $nX^{n-1}X' = sY^{s-1}Y'$; como *a fortiori* $(X, Y) = l$, deducimos que $X \mid Y'$ y $Y \mid X'$; si estamos en característica cero, estas relaciones entrañan las siguientes desigualdades

$$\text{grado } X(t) \leq \ \text{grado } (Y(t)) - 1 \ ,$$
$$\text{grado } Y(t) \leq \ \text{grado } (X(t)) - 1 \ ,$$

las cuales no subsisten simultáneamente para números enteros. En característica $p > 0$, cuando $Y' \neq 0$, entonces también $X' \neq 0$ y el argumento anterior sobre los grados es aún válido. Si $Y' = X' = 0$, $X, Y \in K[T_1]$, y recurrentemente debemos llegar, como en el caso de la ecuación de Fermat, a la siguiente situación:

$$X, Y \in K[t] \ ,$$
$$m = \text{grado } Y(t) = p^k u \leq \text{grado } X(t) \ , p \nmid u \ .$$

Como antes, $dY/dT_k \neq 0$, pudiéndose concluir igualmente que X e Y no son soluciones de (2) en $K[T_k]$ y *a fortiori* en $K[t]$.

Vale la pena mencionar que (2) tiene soluciones no constantes en $\mathbb{C}(t)$ si $m = s = 2$, verbigracia,

$$\left(\frac{t^2 - 1}{t^2 + 1}\right) - \left(\frac{2\sqrt{-1}t^2}{t^2 + 1}\right) = 1$$

pero no si $m, s > 3$ [3] . Nathanson pregunta entonces si existen soluciones de la ecuación de Calalan en $K(t)$ si $n = 2$ y $s > 2$.

Referencias

1. Newcomb Greenleaf, *On Fermat's equation in* $\mathbb{C}(t)$, Amer. Math. Monthly **76**, 808–809.
2. A. Korkine, *Sur l'impossibilité de la relation algébrique* $X^n + Y^n + Z^n = 0$, C. R .Acad. Sci. Paris **90**, 303–304.
3. Melvyn B. Nathanson, *Catalan's equation in* $K(t)$, Amer. Math. Monthly **81**, 371-373.

Departamento de Matemáticas y Estadística, Universidad Nacional de Colombia. Santafé de Bogotá, Colombia

E-mail address: valbis@ciencias.ciencias.unal.edu.co