FUNCIONES ZETA LOCALES DE IGUSA DE ALGUNOS POLINOMIOS

John Jaime Rodríguez Vega

Índice general

Introducción

En 1965 André Weil [We1] introduce las funciones zeta locales

$$Z_{\Phi}(s,\chi,f) = \int_{K^n} \Phi(x)\chi(ac(f(x)))|f(x)|_K^s\,|dx|, \qquad (1)$$

donde K es un cuerpo local no arquimediano, Φ es una función de Schwartz-Bruhat, χ es un carácter de $\mathcal{O}_K^{\times}$, el grupo de unidades del anillo de enteros de K, $|x|_K = q^{-v(x)}$, donde q es el cardinal del cuerpo residual de K, $v(x)$ es la valuación normalizada por $v(\pi) = 1$, donde π es un parámetro uniformador fijo y $|dx|$ es una medida de Haar en K normalizada por $\int_{\mathcal{O}_K} |dx| = 1$. Weil estaba interesado en mirar con técnicas *adelicas*, los trabajos sobre la teoría aritmética de las formas cuadráticas de C. Siegel. Diez años más tarde Jun-ichi Igusa, interesado en la teoría de formas de grado mayor a dos, estudia las propiedades básicas de (1) para $f(x)$ arbitrario, Igusa motiva su estudio para encontrar resultados generales sobre sumas exponenciales que están asociadas a estas formas.

Igusa muestra, utilizando el profundo teorema de resolución de singularidades en característica cero de H. Hironaka, que para un χ fijo (1) es una función racional de $t = q^{-s}$ esto siempre y cuando K tenga característica cero.

Diez años más tarde Jan Denef dio una nueva demostración de este resultado. En este caso las herramientas vinieron de la lógica matemática; de manera más precisa de un teorema fundamental de A. Macintyre que afirma que los cuerpos p-ádicos $\mathbb{Q}_p$ admiten una eliminación de cuantificadores. Hay que decir que los resultados de Igusa y Denef no son constructivos, así aunque se sabe que las funciones zeta locales son racionales, en el caso de característica cero, no se tiene aún un método general para calcularlas.

En el caso en el que K tenga característica positiva, no se tiene hasta el momento un resultado que garantice, de manera general que estas funciones zeta locales son racionales, en efecto no poseemos hasta el momento una teoría suficientemente general de resolución de singularidades en característica positiva, como para generalizar la demostración de Igusa, y por el lado de la lógica los anillos que nos interesan no poseen una eliminación de cuantificadores que permita extender los resultados de Denef. Así en este caso el problema de la racionalidad de las funciones zeta locales está abierto aun. Los resultados más generales conocidos hasta el momento son obra de un colombiano, el profesor WILSON ZÚÑIGA [Z-G1] y [Z-G2].

Estas funciones zeta locales, llamadas ahora *funciones zeta locales de Igusa* están relacionadas con el número de soluciones de congruencias módulo $\pi^m\mathcal{O}_K$ y con sumas exponenciales módulo $\pi^m\mathcal{O}_K$. También como dice Denef en su *Report* [D2] existen conexiones de las funciones zeta locales de Igusa con topología y teoría de las singularidades; también hay varias conjeturas relacionadas con ellas. Para mas información le recomendamos al lector leer el *Report* de Denef. Integrales como éstas también empiezan a aparecer en la estimación de las soluciones de ecuaciones *pseudo-diferenciales* sobre cuerpos p-ádicos [Z-G6], ecuaciones que empiezan a aparecer en el uso del análisis p-ádico a modelos cuánticos de la física. También las funciones zeta locales de Igusa empiezan a tener aplicaciones en criptografía, por lo que sugerimos al lector consultar [Z-G3].

En 1994 Igusa descubrió que existe un método conocido como *fórmula de la fase estacionaria para integrales p-ádicas* [I4], que dicta que la forma de una función zeta local de Igusa está relacionada con los puntos singulares de $f(x)$ módulo $\pi\mathcal{O}_K$. Este es un procedimiento iterativo que permite en muchos casos calcular las funciones zeta locales de una manera bastante explícita.

Lo que haremos en este trabajo es calcular con la ayuda de la fórmula de la fase estacionaria de Igusa, las funciones zeta locales de varios polinomios. Los cálculos que haremos serán independientes de la característica lo cual hace plausible pensar que las funciones zeta locales siempre son racionales, sin importar la característica.

En el primer capítulo expondremos las propiedades básicas de las cuerpos locales que necesitaremos. A continuación, en el segundo capítulo, definimos las funciones zeta locales de Igusa y estudiamos algunas de sus propiedades básicas, en el tercer capítulo, utilizando las referencias [Z-G1] y [Z-G2] enunciamos y demostramos la racionalidad de la función zeta local de Igusa asociada a un polinomio cuasihomogéneo en el caso de característica arbitraria. Este resultado esta implícito en los trabajos de W. Zúñiga y generaliza algunos de los resultados de [Z-G1]. Por último, calculamos las funciones zeta locales para algunos polinomios en el capítulo cuarto.

Quiero aquí agradecer al profesor Víctor Albis por sugerirme este tema para mi trabajo de grado, por las valiosas charlas que hemos mantenido sobre este y otros temas; y por iniciarme en el fértil estudio de las funciones zeta locales de Igusa. También quiero agradecer al profesor Wilson Zúñiga, de la Barry University, por la inmensa colaboración que me ha prestado en este trabajo, en particular su colaboración guiandome en la lectura de algunos de sus artículos y en la presentación de algunos de los resultados.

J. Jaime Rodríguez Vega.

Bogotá, Octubre de 2004.

Capítulo 1

Cuerpos Locales

En este primer capitulo resumiré muchos de los resultados necesarios de los cuerpos locales que usaremos.

1.1. Valores Absolutos

Sea K un cuerpo. Un *valor absoluto* $|\ |_K$ de K es una aplicación $|\ |_K : K \to \mathbb{R}_+ \cup 0$ que cumple

1) $|x|_K = 0$ si, y sólo si, $x = 0$

2) Para todo $x, y \in K$ $|xy|_K = |x|_K |y|_K$

3) Existe una constante $C > 0$ tal que para todo $x, y \in K$ $|x + y|_K \leq C \max\{|x|_K, |y|_K\}$.

Si 3) es válida con $C = 1$, diremos que $|\ |_K$ es un valor absoluto no arquimediano, de lo contrario diremos que $|\ |_K$ es una valor absoluto arquimediano.

Ejemplo. Sea $p \in \mathbb{Z}$ un primo. Por la descomposición en factores primos sabemos que todo $\frac{a}{b} \in \mathbb{Q}$ se puede escribir en la forma $p^n \frac{a'}{b'}$ con m.c.d$(a', b') = 1$, $p \nmid a$, $p \nmid b$ y $n \in \mathbb{Z}$. Si definimos

$$\left|\frac{a}{b}\right|_p = p^{-n}$$

el lector podrá verificar que $|\ |_p$ define un valor absoluto no arquimediano sobre $\mathbb{Q}$

El valor absoluto definido por $|x|_K = 1$ si $x \neq 0$ y $|0|_K = 0$ se llama el *valor absoluto trivial*. Por otro lado si $|\ |_1$ y $|\ |_2$ son dos valores absolutos en K, diremos que ellos son equivalentes si existe $\alpha > 0$ tal que $|\ |_1 = |\ |_2^\alpha$. Claramente todo valor absoluto es equivalente a uno para el cual $C = 2$ y veremos que estos satisfacen la desigualdad triangular.

Lema 1.1. Si $|x+y|_K \leq 2\,\text{máx}\{|x|_K, |y|_K\}$, entonces n $|x_1+\cdots+x_n|_K \leq 2n\ \text{máx}\{|x_1|_K,\ldots,|x_n|_K\}$ para todo n.

Demostración. Primero observemos que por inducción

$$|x_1+\cdots+x_{2^r}|_K \leq 2^r\ \text{máx}\{|x_1|_K,\ldots,|x_{2^r}|_K\}$$

Por otra parte, existe un único $r>0$ tal que $2^r \leq n < 2^{r+1}$, luego

$$\begin{aligned}|x_1+\cdots+x_n|_K &= |\overbrace{x_1+\cdots+x_n+0+\cdots+0}^{2^{r+1}\ \text{sumandos}}|_K \\ &\leq 2^{r+1}\ \text{máx}\{|x_1|_K,\ldots,|x_n|_K\} \\ &\leq 2n\ \text{máx}\{|x_1|_K,\ldots,|x_n|_K\}\end{aligned}$$

□

Proposición 1.1. Si $|x+y|_K \leq 2\,\text{máx}\{|x|_K, |y|_K\}$, entonces $|x+y|_K \leq |x|_K + |y|_K$.

Demostración. Sea $n>0$. Entonces

$$\begin{aligned}|x+y|_K^n = |(x+y)^n|_K = \left|\sum_{r=0}^{n}\binom{n}{r}x^{n-r}y^r\right| \\ \leq 2(n+1)\,\underset{r}{\text{máx}}\{|\binom{n}{r}x^{n-r}y^r|_K\},\end{aligned}$$

por otro lado,

$$\left|\binom{n}{r}\cdot 1\right| \leq 2\binom{n}{r}|1|;$$

luego

$$\begin{aligned}2(n+1)\,\underset{r}{\text{máx}}\{|\binom{n}{r}x^{n-r}y^r|_K\} &\leq 4(n+1)\sum_{r=0}^{n}\binom{n}{r}|x|_K^{n-r}|y|_K^r \\ &= 4(n+1)\big(|x|_K+|y|_K\big)^n,\end{aligned}$$

y, por consiguiente,

$$|x+y|_K \leq \big(4(n+1)\big)^{\frac{1}{n}}(|x|_K+|y|_K),$$

de modo que si hacemos que $n\to\infty$ obtenemos el resultado. □

Ahora dado un valor absoluto en K definimos una topología cuya base de abiertos es

$$\mathcal{B}_\varepsilon^{|\ |_K}(a) = \{x\in K \mid |x-a|_K < \varepsilon\}.$$

Es claro que tenemos

$$\mathcal{B}_{\varepsilon}^{|\ |_K}(a) = \mathcal{B}_{\varepsilon^\alpha}^{|\ |_K^\alpha}(a);$$

luego valores absolutos equivalentes producen la misma topología y por la proposición anterior cualquiera de estas topologías proviene de la métrica $d(x, y) = |x - y|_K$.

Lema 1.2. Respecto a la topología inducida por la métrica d, K es un cuerpo topológico.

Demostración. Primero veamos que la aplicación $T_a : K \to K$ dada por $T_a(x) := x + a$, donde $a \in K$ esta fijo, es un homeomorfismo.

En efecto como $|x - y|_K = |T_a(x) - T_a(y)|_K$ esta aplicación es una isometría, luego es continua. Claramente su inversa es T_{-a} que también es continua.

Análogamente la aplicación $D_a : K \to K$ dada por $D_a(x) := ax$, donde $a \in K^\times$ es también un homeomorfismo.

Luego resta ver que la suma es continua en $(0, 0)$ y la multiplicación es continua en $(1, 1)$, y esto el lector podrá comprobarlo. $\square$

Sea $|\ |_K$ un valor absoluto no arquimediano en K. Si definimos $\upsilon : K^\times \to \mathbb{R}$ por $\upsilon(x) = -\ln(|x|_K)$, es obvio que υ define un homomorfismo, luego $\upsilon(K^\times)$ es un subgrupo aditivo de $\mathbb{R}$ y un conocido teorema de topología afirma que todo subgrupo aditivo de $\mathbb{R}$ es denso o es cíclico. Estaremos interesados especialmente en el caso en que $\upsilon(K^\times)$ es cíclico no trivial, en cuyo caso existe $\alpha > 0$ tal que $\upsilon(K^\times) = \alpha\mathbb{Z}$. Si hacemos $\beta = (-\ln(|\alpha|_K))^{-1}$, entonces se puede ver que para $|\ |_K = |\ |_K^\beta$ se tiene que $\upsilon(K^\times) = \mathbb{Z}$, de manera que siempre podemos suponer que esto ocurre. En este caso diremos que $|\ |_K$ es un *valor absoluto no arquimediano discreto.*

Por otro lado diremos que K es completo respecto al valor absoluto $|\ |_K$ si K es completo como espacio métrico

En el caso en que $|\ |_K$ sea un valor absoluto no arquimediano definimos

$$\mathcal{O}_K = \{x \in K \mid |x|_K \leq 1\}$$
$$\mathcal{P}_K = \{x \in K \mid |x|_K < 1\}$$

Lema 1.3. $\mathcal{O}_K$ es un subanillo de K y $\mathcal{P}_K$ es el único ideal maximal de $\mathcal{O}_K$.

Demostración. Para ver que $\mathcal{O}_K$ es un subanillo es suficiente mostrar que este es cerrado bajo las operaciones de K; así sean $x, y \in \mathcal{O}_K$ entonces como $|\ |_K$ es una valor absoluto no arquimediano tenemos $|x + y|_K \leq \max\{|x|_K, |y|_K\} \leq 1$ luego $x+y \in \mathcal{O}_K$. Por otro lado, $|xy|_K = |x|_K|y|_K \leq 1$, de modo que $xy \in \mathcal{O}_K$ por tanto, $\mathcal{O}_K$ es un subanillo de K.

Por otro lado si $x, y \in \mathcal{P}_K$ entonces claramente $x + y \in \mathcal{P}_K$ y si $z \in \mathcal{O}_K$ entonces $|zx|_K < |z|_K \leq 1$ luego $zx \in \mathcal{P}_K$ así $\mathcal{P}_K$ es un ideal de $\mathcal{O}_K$. Veamos que es el único ideal maximal. Para esto es suficiente ver que si $x \in \mathcal{O}_K \setminus \mathcal{P}_K$, entonces x es una unidad de $\mathcal{O}_K$; pero si $x \in \mathcal{O}_K \setminus \mathcal{P}_K$ entonces $|x|_K = 1$, y como $|x^{-1}|_K = |x|_K^{-1}$ tenemos $|x^{-1}|_K = 1$, es decir $x^{-1} \in \mathcal{O}_K$. $\square$

En el caso no arquimediano el cuerpo $\mathcal{O}_K/\mathcal{P}_K$ se denomina el *cuerpo residual* de K.

Con todo esto podemos definir nuestros principales cuerpos de estudio: los *cuerpos locales*.

Existe alguna discrepancia en la literatura para el significado del término *cuerpo local*. J.-P. Serre [S1] lo define como un cuerpo completo respecto a una valuación discreta, pero en su contribución a J. Cassels & A. Fröhlich [C-F] suma la condición de que su cuerpo residual sea finito. Por otro lado, A. Weil [We2] toma esta última definición más restrictiva, pero incluye a $\mathbb{R}$ y $\mathbb{C}$. El primer ejemplo de un cuerpo local son los cuerpos p-ádicos $\mathbb{Q}_p$, los cuales fueron introducidos por K. Hensel[1], en un artículo cuyo título se puede traducir como *Sobre el desarrollo de números algebraicos en series de potencias*, el cual generaliza el uso de K. Weierstrass de los desarrollos en series de potencias para funciones analíticas de variable compleja. Hensel usa los cuerpos p-ádicos $\mathbb{Q}_p$ y sus extensiones algebraicas finitas para proporcionar un tratamiento de los números algebraicos alternativo a la aproximación original de E. Kummer.

Por tal razón definimos en el caso arquimediano

Definición. K es llamado un *cuerpo local arquimediano* si es completo respecto a una valuación arquimediana.

y en el caso no arquimediano

Definición. K es llamado un *cuerpo local no arquimediano* si es completo respecto a una valuación no arquimediana discreta y su cuerpo residual es finito.

Nuestro primer objetivo es la clasificación de los cuerpos locales.

En el caso arquimediano tenemos el siguiente resultado, el cual el lector podrá encontrar en [Ws, pág. 34]:

Teorema. Sea K completo con respecto a una valuación arquimediana. Entonces K es isomorfo a $\mathbb{R}$ o $\mathbb{C}$.

Por otro lado, como veremos más adelante, tenemos dos clases de cuerpos locales no arquimedianos

- Cuerpos $K/\mathbb{Q}_p$ donde $K/\mathbb{Q}_p$ es una extensión algebraica finita.
- Cuerpos $k((T))$ de series meromorfas formales con coeficientes en un cuerpo finito k.

Para obtener esta clasificación mostraremos primero algunas de las propiedades de los cuerpos locales no arquimedianos.

[1] *Über die Entwicklung der algebraischen Zahlen in Potenzreihen*, Math. Ann. **55**(1902) pp.301–336 Véase también *Über eine neue Begründung der Theorie der algebraischen Zahlen*, Jahresbericht der Deutschen Mathematiker-Vereinigung **6**(1897) pp.83–88

1.2. Propiedades de los cuerpos locales no arquimedianos

En este apartado K siempre sera un cuerpo local no arquimediano.

Proposición 1.2. El ideal maximal $\mathcal{P}_K$ de $\mathcal{O}_K$ es principal.

Demostración. Como $|\ |_K$ es un valor absoluto no arquimediano discreto, sabemos que la valuación asociada $\upsilon(x)$ definida en $K^\times$ y con valores en $\mathbb{Z}$ es una aplicación sobreyectiva. Por lo tanto existe $\pi \in K^\times$ tal que $\upsilon(\pi) = 1$. Verifiquemos que $\mathcal{P}_K = \pi\mathcal{O}_K$; como $\upsilon(\pi) = 1$ entonces $|\pi|_K < 1$ luego si $x \in \mathcal{O}_K$ tenemos $|\pi x|_K < 1$ y así $\mathcal{P}_K \supset \pi\mathcal{O}_K$. Por otro lado, sea $x \in \mathcal{P}_K$ luego $|x|_K < 1$ y así $\upsilon(x) > 0$. Sea pues $\upsilon(x) = n$; entonces $\upsilon(x) = \upsilon(\pi^n)$ y por fuerza $\upsilon(x\pi^{-n}) = 0$, de modo que $|x\pi^{-n}|_K = 0$. Luego $x\pi^{-n} \in \mathcal{O}_K^\times$,de manera que $x = \pi^n u$, donde u es una unidad del anillo $\mathcal{O}_K$. Luego $\mathcal{P}_K \subset \pi\mathcal{O}_K$. $\square$

Cualquier π tal que $\mathcal{P}_K = \pi\mathcal{O}_K$ es llamado un parámetro uniformador. De aquí en adelante π estará fijo.

Lema 1.4. $\{\pi^r\mathcal{O}_K \mid r > 0\}$ es el conjunto de todos los ideales propios de $\mathcal{O}_K$.

Demostración. Claramente para todo $r > 0$ $\pi^r\mathcal{O}_K$ es un ideal propio de $\mathcal{O}_K$, recíprocamente sea $I \neq \emptyset$ un ideal propio de $\mathcal{O}_K$, entonces el conjunto $\{\upsilon(a) \mid a \in I\}$ es un subconjunto no vacío de $\mathbb{Z}^+$. Por lo tanto, tiene mínimo. Sea $a \in I$ tal que $\upsilon(a) = n$ es mínimo; fácilmente se ve en este caso que $I = \pi^n\mathcal{O}_K$. $\square$

Por lo tanto $\mathcal{O}_K$ es de manera trivial un dominio de ideales principales y su aritmética es muy sencilla. Existe un único primo (salvo unidades) y todo elemento $a \in \mathcal{O}_K$ es de la forma $\pi^r u$ con $u \in \mathcal{O}_K^\times$. Esta expresión es única ya que $r = \upsilon(a)$ y $u = a\pi^{-r}$; ahora como $K = \mathcal{O}_K \cup \mathcal{O}_K^{-1}$ donde $\mathcal{O}_K^{-1} = \{x^{-1} \mid x \in \mathcal{O}_K \setminus \{0\}\}$ vemos que todo $x \in K^\times$ se puede escribir en la forma $\pi^r u$ con $r \in \mathbb{Z}$, $r = \upsilon(x)$ y la expresión es única. En este caso u es llamada la *componente angular* de x y lo notamos $u = ac(x)$.

Consideremos ahora los conjuntos $\pi^r\mathcal{O}_K = \{x \in K \mid \upsilon(x) \geq r\}$ donde $r < 0$; estos son subgrupos aditivos de K, de hecho son $\mathcal{O}_K$-submódulos de K, y como K es el cuerpo de fracciones de $\mathcal{O}_K$ y si $r < 0$ se tiene $\pi^{-r}(\pi^r\mathcal{O}_K) \subset \mathcal{O}_K$ vemos que los $\pi^r\mathcal{O}_K$ son ideales fraccionarios de K. De hecho tenemos el siguiente resultado.

Lema 1.5. $\{\pi^r\mathcal{O}_K \mid r \in \mathbb{Z}\}$ es el conjunto de todos los ideales fraccionarios de K y ellos forman un grupo bajo multiplicación.

En particular $\mathcal{O}_K$ es un dominio de Dedekind.

1.2.1. Estructura aditiva de los cuerpos locales no arquimedianos

En vista de las consideraciones anteriores tenemos la cadena de grupos aditivos

$$K \supset \cdots \supset \pi^{-2}\mathcal{O}_K \supset \pi^{-1}\mathcal{O}_K \supset \mathcal{O}_K \supset \pi\mathcal{O}_K \supset \pi^2\mathcal{O}_K \supset \cdots \supset \{0\}.$$

Por otro lado, como fácilmente el lector podrá verificar, $\big||x|_K - |y|_K\big| \leq |x-y|_K$. Luego la aplicación $|\ |_K : K \to \mathbb{R}_+ \cup 0$ es uniformemente continua. En particular, $\upsilon : K^\times \to \mathbb{Z}$ es continua, y como $\pi^r\mathcal{O}_K = \{x \in K \mid \upsilon(x) > r-1\}$ se tiene que cada $\pi^r\mathcal{O}_K$ es un conjunto abierto, de hecho también cerrado; luego $\big\{\pi^r\mathcal{O}_K \mid r \in \mathbb{Z}\big\}$ es un sistema fundamental de vecindades de 0 en K y como $T_a(x) = x + a$ son homeomorfismos, tenemos que $\big\{\pi^r\mathcal{O}_K + a \mid r \in \mathbb{Z},\ a \in K\big\}$ es una base para la topología de K.

Recordemos que un espacio topológico es llamado *totalmente disconexo* si, y sólo si, sus únicos subconjuntos conexos son sus subconjuntos reducidos a un punto.

Por otro lado, recordemos la siguiente definición: un espacio topológico X es llamado 0-dimensional si, y sólo si, cada punto de X tiene una base de vecindades formada por abiertos-cerrados, y para estos espacios tenemos el siguiente resultado:[2]

Teorema. Todo espacio T_1 0-dimensional es totalmente disconexo.

Luego en nuestro caso K es totalmente disconexo.

Ahora sea $r \in \mathbb{Z}$; la aplicación de $\pi^r\mathcal{O}_K$ en $\mathcal{O}_K/\pi\mathcal{O}_K$ dada por $x \mapsto \pi^{-r} + \pi\mathcal{O}_K$ es claramente un homomorfismo sobreyectivo de grupos aditivos con núcleo igual a $\pi^{r+1}\mathcal{O}_K$; luego para todo $r \in \mathbb{Z}$ tenemos

$$\frac{\pi^r\mathcal{O}_K}{\pi^{r+1}\mathcal{O}_K} \simeq \frac{\mathcal{O}_K}{\pi\mathcal{O}_K};$$

pero recordemos que en nuestro caso $\mathcal{O}_K/\pi\mathcal{O}_K \simeq \mathbb{F}_q$ el cuerpo finito con q elementos; por lo tanto para todo $r \in \mathbb{Z}$ y todo $n > 0$ tenemos

$$\big[\pi^r\mathcal{O}_K : \pi^{r+n}\mathcal{O}_K\big] = \big[\pi^r\mathcal{O}_K : \pi^{r+1}\mathcal{O}_K\big] \cdot \ldots \cdot \big[\pi^{r+n-1}\mathcal{O}_K : \pi^{r+n}\mathcal{O}_K\big] = q^n$$

1.2.2. Estructura multiplicativa de los cuerpos locales no arquimedianos

Para cada $r > 0$, $1 + \pi^r\mathcal{O}_K$ es un subgrupo multiplicativo de $K^\times$, ya que si $a = 1 + \pi^r u$, $b = 1 + \pi^r v \in 1 + \pi^r\mathcal{O}_K$, donde $u, v \in \mathcal{O}_K$, entonces

$$ab = (1 + \pi^r u)(1 + \pi^r v) = 1 + \pi^r(u + v + \pi^r uv) \in 1 + \pi^r\mathcal{O}_K;$$

[2]Una demostración de esto se puede encontrar por ejemplo en S. Willard, *General Topology*, Addison-Wesley, Reading, 1970, pág. 210

por otro lado, si $a \in 1 + \pi^r \mathcal{O}_K$, entonces $v(a) = 0$, de modo que $1 + \pi^r \mathcal{O}_K \subset \mathcal{O}_K^\times$ y como $a^{-1} \in \mathcal{O}_K^\times$ tenemos que $1 = a^{-1}a = a^{-1}(1+\pi^r u) = a^{-1} + \pi^r u a^{-1}$, de manera que $a^{-1} = 1 + \pi^r(-ua^{-1}) \in 1 + \pi^r \mathcal{O}_K$; por lo tanto $1 + \pi^r \mathcal{O}_K$ es un subgrupo multiplicativo de $\mathcal{O}_K^\times$ y tenemos la siguiente cadena de grupos multiplicativos

$$K^\times \supset \mathcal{O}_K^\times \supset 1 + \pi \mathcal{O}_K \supset \cdots \supset \{1\};$$

en particular, $\left\{1 + \pi^r \mathcal{O}_K \mid r \geq 1\right\}$ es un sistema fundamental de vecindades de 1 en $K^\times$; por tanto $K^\times$ es totalmente disconexo.

1.2.3. Otras propiedades de los cuerpos locales no arquimedianos

En este apartado mostraremos cómo funcionan las nociones de convergencia en los cuerpos locales no arquimedianos. También veremos que estos cuerpos siempre son localmente compactos.

Lema 1.6. Sea $\{a_n\}$ una sucesión en K, entonces $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ converge si, y sólo si, $a_n \to 0$.

Demostración. La necesidad es trivial; por otro lado, supongamos que $a_n \to 0$ y sea $m > l$, y hagamos $s_m = \sum_{n=0}^{m} a_n$. Entonces

$$|s_m - s_l|_K = |a_{l+1} + \cdots + a_m|_K \leq \max_{l<n\leq m} |a_n|_K \to 0;$$

luego $\{s_m\}$ es una sucesión de Cauchy, y como K es completo ella converge. □

A continuación daremos una descripción explícita de los elementos de $\mathcal{O}_K$.

Lema 1.7. Sean π un parámetro uniformador y $S \subset \mathcal{O}_K$ un sistema de representantes de $\mathcal{O}_K/\pi\mathcal{O}_K$. Entonces todo $a \in \mathcal{O}_K$ se puede representar de manera única en la forma

$$a = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \pi^n, \qquad a_n \in S,$$

y recíprocamente toda serie de esta forma converge a un elemento de $\mathcal{O}_K$.

Demostración. Para el recíproco tenemos el teorema anterior y el hecho que $a_n\pi^n \to 0$. Solo resta ver que la convergencia es efectivamente hacia un elemento de $\mathcal{O}_K$. Pero

$$|\sum_{n=0}^{\infty} a_n \pi^n|_K \leq \max_n |a_n \pi^n|_K \leq 1,$$

luego efectivamente la convergencia es hacia un elemento de $\mathcal{O}_K$. Ahora sea $a \in \mathcal{O}_K$. Existe un único $a_0 \in S$ tal que $a \equiv a_0 \pmod{\pi\mathcal{O}_K}$, de modo que $a = a_0 + \pi b_1$ para algún $b_1 \in \mathcal{O}_K$. Nuevamente existe un único $a_1 \in S$ tal que $b_1 \equiv a_1 \pmod{\pi\mathcal{O}_K}$, de manera que $b_1 = a_1 + \pi b_2$ para algún $b_2 \in \mathcal{O}_K$. Continuando de esta forma obtenemos, para todo n,

$$a = a_0 + a_1\pi + \cdots + a_n\pi^n + b_{n+1}\pi^{n+1} \qquad \text{con } a_i \in S \qquad ;$$

por otro lado, $b_{n+1}\pi^{n+1} \to 0$ y finalmente

$$a = \sum_{n=0}^{\infty} a_n\pi^n \quad .$$

□

Usualmente es conveniente asumir que $0 \in S$, bajo esta suposición tenemos

Corolario. Todo $a \in K$ es representable de manera única como una serie convergente

$$a = \sum_{n=m}^{\infty} a_n\pi^n \qquad \text{con } a_n \in S \quad a_m \neq 0, \quad m \in \mathbb{Z}$$

Demostración. Ya que $a \in \pi^m\mathcal{O}_K$ para algún $m \in \mathbb{Z}$ así $\pi^{-m}a \in \mathcal{O}_K$ □

A continuación pasamos a mostrar que todo cuerpo local no arquimediano es localmente compacto. El siguiente lema es casi obvio, ya que $\pi^r\mathcal{O}_K$ es un subconjunto cerrado.

Lema 1.8. Para todo $r \in \mathbb{Z}$, $\pi^r\mathcal{O}_K$ es un subespacio completo del espacio métrico K.

Lema 1.9. Para todo $r \in \mathbb{Z}$, $\pi^r\mathcal{O}_K$ está totalmente acotado.

Demostración. Sea $\varepsilon > 0$, y escojamos $n > r$ adecuado para que $|\pi^n|_K < \varepsilon$. Por otro lado, como $[\pi^r\mathcal{O}_K : \pi^n\mathcal{O}_K] = q^{n-r}$ tenemos que los q^{n-r} abiertos $a_i + \pi^n\mathcal{O}_K$, donde a_i pertenece a algún conjunto de representantes de $\pi^r\mathcal{O}_K/\pi^n\mathcal{O}_K$ en $\pi^r\mathcal{O}_K$, cubren $\pi^r\mathcal{O}_K$ y $\operatorname{diam}(a_i + \pi^n\mathcal{O}_K) < \varepsilon$. □

Con todo lo anterior ya podemos afirmar

Proposición 1.3. Para todo $r \in \mathbb{Z}$, $\pi^r\mathcal{O}_K$ es compacto.

Demostración. $\pi^r\mathcal{O}_K$ es un espacio métrico completo y totalmente acotado, y sabemos que en un espacio métrico compacidad es equivalente a esto. □

Ahora recordemos que un espacio topológico X es llamado localmente compacto si para todo $x \in X$ existe una vecindad $B(x)$ de x, tal que la clausura topológica de $B(x)$ es compacta. Por lo tanto tenemos el siguiente resultado, clave en la teoría de los cuerpos locales no arquimedianos.

Proposición 1.4. Si K es un cuerpo local no arquimediano, entonces el es localmente compacto.

1.3. Clasificación de los cuerpos locales no arquimedianos.

El objetivo de esta sección es mostrar que todo cuerpo local no arquimediano es de uno de los siguientes tipos:

- Cuerpos $K/\mathbb{Q}_p$ donde $K/\mathbb{Q}_p$ es una extension algebraica finita de $\mathbb{Q}_p$, el cuerpo de los numeros p-ádicos.
- cuerpos $k((T))$ de series formales meromorfas con coeficientes en un cuerpo finito k.

Un primer resultado que necesitaremos, es el llamado Lema de Hensel. En la literatura hay una variedad de resultados que llevan este nombre. Su característica común es que de la existencia de una solución aproximada de una ecuación o un sistema de ecuaciones en un cuerpo completo implica la existencia de una solución exacta de la cual la primera es una aproximación, esto sujeto a la condición de que la solución aproximada se comporte "bien". Estos resultados son ejemplos del proceso de solución por aproximaciones sucesivas, del cual se tiene noticia desde Newton (al menos). De hecho el lema de Hensel se puede ver como el análogo π-ádico del clásico método de Newton para aproximar raíces reales de una función real diferenciable.

Lema 1.10 (Lema de Hensel). Sea K un cuerpo local no arquimediano. Sean $\mathcal{O}_K$ y $\pi\mathcal{O}_K$ su anillo de enteros y el ideal maximal de este anillo que corresponden a $|\ |_K$. Sea $f(x) \in \mathcal{O}_K[x]$ y sea $f'(x)$ su derivada formal. Si existe $a_1 \in \mathcal{O}_K$ tal que $f(a_1) \equiv 0 \pmod{\pi\mathcal{O}_K}$ y $f'(a_1) \not\equiv 0 \pmod{\pi\mathcal{O}_K}$, entonces existe un único $a \in \mathcal{O}_K$ tal que $f(a) = 0$ y $a \equiv a_1 \pmod{\pi\mathcal{O}_K}$

Demostración. Veamos inductivamente que si $f(x) \equiv 0 \pmod{\pi^n\mathcal{O}_K}$ tiene una solución a_n, entonces existe un único $a_{n+1} \pmod{\pi^{n+1}\mathcal{O}_K}$ tal que

$$f(a_{n+1}) \equiv 0 \pmod{\pi^{n+1}\mathcal{O}_K} \quad \text{y} \quad a_{n+1} \equiv a_n \pmod{\pi^n\mathcal{O}_K} \quad ;$$

para tal fin sea $a_{n+1} = a_n + \pi^n t$, buscamos $t \in \mathcal{O}_K$ tal que $f(a_n + \pi^n t) \equiv 0 \pmod{\pi^{n+1}\mathcal{O}_K}$. Si $f(x) = c_0 + c_1 x + \cdots + c_m x^m$, entonces

$$\begin{aligned} f(a_n + \pi^n t) &= \sum_{i=0}^{m} c_i (a_n + \pi^n t)^i \\ &= \sum_{i=0}^{m} c_i \sum_{l=0}^{i} \binom{i}{l} a_n^{i-l} (\pi^n t)^l \\ &\equiv \sum_{i=0}^{m} c_i (a_n^i + i\pi^n t a_n^{i-1}) \pmod{\pi^{n+1}\mathcal{O}_K} \\ &\equiv f(a_n) + \pi^n t f'(a_n) \pmod{\pi^{n+1}\mathcal{O}_K} \quad , \end{aligned}$$

es decir, necesitamos resolver la congruencia $f(a_n) + \pi^n t f'(a_n) \equiv 0 \pmod{\pi^{n+1}\mathcal{O}_K}$, pero por hipótesis $f(a_n) \equiv 0 \pmod{\pi^n \mathcal{O}_K}$, luego la congruencia se reduce a

$$t f'(a_n) \equiv \frac{-f(a_n)}{\pi^n} \pmod{\pi\mathcal{O}_K}$$

la cual tiene solución única $t \pmod{\pi\mathcal{O}_K}$ ya que $a_n \equiv a_1 \pmod{\pi\mathcal{O}_K}$ y $f'(a_1) \not\equiv 0 \pmod{\pi\mathcal{O}_K}$. Por lo tanto, tenemos una sucesión $\{a_n\}$ en $\mathcal{O}_K$ tal que $a_{n+1} \equiv a_n \pmod{\pi^n\mathcal{O}_K}$. Por lo tanto $\{a_n\}$ es una sucesión de Cauchy, y como $\mathcal{O}_K$ es completo existe $a \in \mathcal{O}_K$ tal que $a_n \to a$ y como $f(a_{n+1}) \equiv 0 \pmod{\pi^{n+1}\mathcal{O}_K}$, se tiene que $f(a_n) \to 0$, pero $f(a_n) \to f(a)$, luego $f(a) = 0$. La unicidad de la solución es clara. $\square$

El siguiente lema nos será útil.

Lema 1.11. Sea K un cuerpo local no arquimediano de característica $p > 0$, entonces la característica de $\mathcal{O}_K/\pi\mathcal{O}_K$ es también p.

Demostración. Por hipótesis, $\mathbb{F}_p \subset K$. Sea $x \in K$ tal que $x \in \mathbb{F}_p$, lo cual fuerza que $x^p - x = 0$. Por lo tanto, $\overline{x}^p - \overline{x} = \overline{0}$ en $\mathcal{O}_K/\pi\mathcal{O}_K$, y como $\mathcal{O}_K/\pi\mathcal{O}_K$ es un cuerpo finito y contiene un cuerpo de descomposición de $x^p - x$ necesariamente $\mathbb{F}_p \subset \mathcal{O}_K/\pi\mathcal{O}_K$, y así $\mathcal{O}_K/\pi\mathcal{O}_K \simeq \mathbb{F}_{p^r}$. $\square$

Como un corolario se tiene que si K es un cuerpo local no arquimediano y su característica es diferente de la característica de $\mathcal{O}_K/\pi\mathcal{O}_K$, entonces K tiene característica 0.

Con estos resultados podemos ya clasificar los cuerpos locales no arquimedianos.

Caso de característica igual

En este caso K y $\mathcal{O}_K/\pi\mathcal{O}_K$ tienen la misma característica $p > 0$, sea $\mathcal{O}_K/\pi\mathcal{O}_K \simeq \mathbb{F}_{p^r}$. Mostremos que $\mathbb{F}_{p^r} \subset K$. Para esto tomemos el polinomio $f(x) = x^{p^r-1} - 1$. Por hipótesis, existen $a_1, \ldots, a_{p^r-1}$ en $\mathcal{O}_K$, todos distintos $\pmod{\pi\mathcal{O}_K}$, tales que $f(a_i) \equiv 0 \pmod{\pi\mathcal{O}_K}$, y $f'(a_i) \not\equiv 0 \pmod{\pi\mathcal{O}_K}$;

luego por el lema de Hensel cada uno de estos produce una raíz de $f(x) = x^{p^r-1} - 1$ en K, por lo tanto $f(x)$ se descompone en K, por lo tanto K contiene un subcampo k isomorfo a $\mathbb{F}_{p^r}$. Por otro lado, el corolario de la página 11, tomando como un conjunto de representantes a k tenemos que todo elemento de K se escribe en la forma

$$\sum_{n=m}^{\infty} a_n \pi^n, \qquad a_n \in k, \qquad m \in \mathbb{Z}$$

y, fácilmente se ve que esta representación conmuta con las propiedades algebraicas de K, por lo tanto tenemos un isomorfismo

$$K \to \mathbb{F}_{p^r}((T))$$

$$\sum_{n=m}^{\infty} a_n \pi^n \mapsto \sum_{n=m}^{\infty} a_n T^n$$

luego en este caso $K \simeq \mathbb{F}_{p^r}((T))$.

Caso de característica diferente

En este caso K y $\mathcal{O}_K/\pi\mathcal{O}_K$ tienen característica diferente, luego por lo dicho antes K tienen característica 0 y $\mathcal{O}_K/\pi\mathcal{O}_K$ característica $p > 0$. Luego $\mathbb{Q} \subset K$ y $|\ |_K$ restringida a $\mathbb{Q}$ es equivalente a $|\ |_p$ [Gs]. Por consiguiente la clausura de $\mathbb{Q}$ es isomorfa a $\mathbb{Q}_p$ y así $\mathbb{Q}_p \subset K$. El siguiente resultado clarifica la estructura de K.

Teorema (Weil). [Gs, pag. 52–55] Sea V un espacio vectorial localmente compacto sobre $\mathbb{Q}_p$, entonces la dimension de V sobre $\mathbb{Q}_p$ es finita. De hecho $[K : \mathbb{Q}_p] = n$, donde $n = ef$ con $f = [\mathcal{O}_K/\pi\mathcal{O}_K : \mathbb{F}_p]$ y $e = \upsilon(p)$.

1.4. La serie de Poincaré

Frecuentemente es posible asociar con una sucesión S_n de situaciones matemáticas una sucesión c_n de enteros positivos o cero, que en general son invariantes de los S_n. Si esta sucesión numérica es recurrente la situación es matemáticamente hablando muy agradable, no solo desde el punto de vista de la calculabilidad de los c_n sino también desde el punto de vista estético, pues pasar de c_n a c_{n+1} es un proceso que se comporta bien y elegantemente; en efecto, decir que la sucesión c_n es recurrente equivale a asegurar la existencia de un entero $\eta \geq 1$ tal que para todo $n \geq \eta$, c_n puede calcularse a partir de $c_1, \ldots, c_\eta$ por medio de una recurrencia lineal. Se puede ver en [A-C] que esto es equivalente a afirmar que la serie potencial formal

$$P(T) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n T^n \quad ,$$

llamada la *serie de Poincaré*, es una función racional de T. Por eso en diversas ramas de la matemática una conjetura sobre el buen comportamiento de una sucesión de invariantes se expresa proponiendo que la correspondiente serie de Poincaré sea una función racional. Esto hicieron Borevich y Shafarevich en su libro [B-S, pag. 47, problema 9], al conjeturar lo siguiente: sea $f(x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{Z}_p[x_1, \ldots, x_n]$, donde $\mathbb{Z}_p$ es el anillo de los enteros p-ádicos, el $\mathcal{O}_K$ de $\mathbb{Q}_p$ con nuestra notación, sea N_m el número de soluciones de la congruencia $f(x_1, \ldots, x_n) \equiv 0 \pmod{p^m \mathbb{Z}_p}$, donde hacemos $N_0 = 1$, entonces la serie de Poincaré $\sum_{m=0}^{\infty} N_m T^m$ es una función racional de T. Ellos se basaron en la validez de esto en algunos casos clásicos; la solución general vino en 1974 cuando Jun-ichi Igusa [I1] demostró la validez de esto como consecuencia de resultados más generales. Lo que mostró Igusa fue que cierta función zeta local, llamada hoy la función zeta local de Igusa asociada a $f(x_1, \ldots, x_n)$, es racional. En el siguiente capitulo definiremos estas funciones zeta locales y miraremos algunas de sus propiedades. Diez años después en 1984, Jan Denef [D1] dio una nueva demostración de este hecho utilizando eliminación de cuantificadores en $\mathbb{Q}_p$; al observar que $\mathbb{Q}_p$ es solo un ejemplo de cuerpo local no arquimediano, surge de manera natural la conjetura de Borevich-Shafarevich en el caso más general en el que $\mathbb{Q}_p$ es reemplazado por un cuerpo local no arquimediano arbitrario K. Las demostraciones de Igusa y Denef incluyen el caso en el que K tenga característica cero, pero no se pueden generalizar al caso de característica positiva. Este caso es aún un problema abierto en estos días. En esa dirección V. Albis y R. Chaparro [A-C], utilizando métodos *elementales*, mostraron su validez en algunos casos particulares.

Capítulo 2

Funciones Zeta Locales de Igusa

En el presente capítulo definiremos las funciones zeta locales de Igusa, mostraremos algunas de sus propiedades, en especial su conexión con la serie de Poincaré e introduciremos la formula de la fase estacionaria π-ádica de Igusa, un proceso iterativo que permite en ciertos casos calcular explícitamente la función zeta local de Igusa.

Presentamos primero la definición de la función zeta local de Igusa y después miramos de dónde viene esta definición.

Sea K un cuerpo local no arquimediano, $\mathcal{O}_K$ su anillo de enteros, $\pi\mathcal{O}_K$ su ideal maximal y $\mathcal{O}_K/\pi\mathcal{O}_K \simeq \mathbb{F}_q$. Para $x \in \mathcal{O}_K$ sea υ la valuación normalizada tal que $\upsilon(\pi) = 1$; sea además $|x|_K = q^{-\upsilon(x)}$ el valor absoluto normalizado; sean también $ac(x) = x\pi^{-\upsilon(x)}$, $f(x) \in \mathcal{O}_K[x]$, $x = (x_1, \dots, x_n)$ y $\Phi : K^n \to \mathbb{C}$ una función de Schwartz-Bruhat, es decir, localmente constante con soporte compacto. Finalmente sea χ un carácter de $\mathcal{O}_K^\times$, es decir, un homomorfismo continuo $\chi : \mathcal{O}_K^\times \to \mathbb{C}$. Definimos formalmente $\chi(0) = 0$. A estos datos asociamos la función zeta local que llamamos de Igusa, siguiendo a J.-P. Serre [S2],

$$Z_\Phi(s, \chi, f) := \int_{K^n} \Phi(x)\chi(ac(f(x)))|f(x)|_K^s \, |dx|,$$

donde $s \in \mathbb{C}$, $Re(s) > 0$ y $|dx|$ denota la medida producto de Haar en K^n normalizada de tal manera que la medida de $\mathcal{O}_K^n$ sea igual a 1. Estas funciones fueron introducidas por A. Weil [We1] y sus propiedades básicas para $f(x)$ arbitrario fueron estudiadas primero por Igusa [I1], [I2].

Igusa estaba interesado en sumas exponenciales del siguiente tipo

$$F^*(up^{-e}) := \frac{1}{p^{ne}} \sum_{\xi \pmod{p^e}} \exp((2\pi u f(\xi))/p^e)$$

donde p es un primo fijo, e es un entero no negativo, u es un entero primo relativo con p^e y $f(x) = f(x_1, \dots, x_n)$ es una forma de grado $m > 2$ con coeficientes en $\mathbb{Z}$ y $\xi \in \mathbb{Z}^n$. Sumas exponenciales que están relacionadas con la teoría aritmética de las formas de grado mayor a 2. Igusa estaba interesado en este tipo de sumas con el fin de desarrollar una teoría de formas de grado superior a 2 que estuviere al mismo nivel en que se encuentra la teoría de formas cuadráticas gracias al trabajo de eminentes matemáticos, en especial de C.L. SIEGEL.

En el caso de formas cuadráticas A. Weil introduce estas funciones zeta [We1] y estudia su conexión con los trabajos de Siegel.

Por su lado Igusa, en los trabajos citados arriba, establece el siguiente resultado en el caso de grado $m > 2$.

Teorema 2.1. Existe $e_0 \geq 0$ tal que para todo $e \geq e_0$

$$F^*(up^{-e})$$

es una combinación lineal de expresiones de la forma $\chi(u)(p^e)^{-\lambda}(\ln p^e)^j$ donde χ es un carácter de Dirichlet que tiene por conductor una potencia de p.

La idea de Igusa para hacer esto es trabajar en cuerpos locales no arquimedianos K y desarrollar una teoría de desarrollos asintóticos allí. También introduce tres funciones asociadas con $f(x)$.

Primero define la *serie singular local*

$$F_\Phi(i) := \int_{U(i)} \Phi(x)\, |\theta_i(x)|_K,$$

donde $\Phi(x)$ es una función de Schwartz-Bruhat, $i \in K$, $U(i) = f^{-1}(i) \smallsetminus Sing_f(K)$ y $|\theta_i|_K$ es una medida de Borel adecuada [I2, pág. 76]. $F_\Phi(i)$ da información acerca de la densidad de soluciones de $f(x) = 0$.

A continuación define la *suma exponencial generalizada*

$$F^*_\Phi(i^*) := \int_{K^n} \Phi(x)\Psi(i^* f(x))\, |dx|,$$

donde $i^* \in K$ y en la cual Ψ es un carácter aditivo en K que es trivial en $\mathcal{O}_K$, no trivial en $\pi^{-1}\mathcal{O}_K$ y permanece fijo.

Por ultimo define la *función zeta local*

$$Z_\Phi(s, \chi, f) := \int_{K^n} \Phi(x)\chi(ac(f(x)))|f(x)|_K^s\, |dx|$$

Igusa muestra que F^*_Φ es la transformada de Fourier de F_Φ, es decir

$$F^*_\Phi(i^*) = \int_{K^n} F_\Phi(i)\Psi(-i\, i^*)\, |di|$$

y que $Z_\Phi(s,\chi,f)$ es la transformada de Mellin de $(1-q^{-1})|y|_K F_\Phi(i)$, es decir

$$Z_\Phi(s,\chi,f) = \int_K F_\Phi(y)\omega(y)\,|dy|,$$

donde $\omega(y) = \chi(ac(y))|y|_K^s$ es un cuasicarácter de $K^\times$.

Entonces lo que hace Igusa es trabajar con $Z_\Phi(s,\chi,f)$. La idea era mostrar que $Z_\Phi(s,\chi,f)$ para χ fijo es una función racional de s. Esto lo logra utilizando el profundo teorema de resolución de singularidades en característica cero de H. HIRONAKA[1]. En 1964 H. Hironaka muestra que siempre existe una resolución de singularidades en característica cero. Este teorema no es nada trivial (recordemos que H. Hironaka recibió la medalla FIELDS por este trabajo en 1970); lastimosamente el resultado de H. Hironaka afirma que existe una resolución de singularidades, pero la demostración no es constructiva, de modo que aunque Igusa mostró que en el caso en que K tiene característica cero la función zeta local $Z_\Phi(s,\chi,f)$ es racional no hay un método general para calcularla.

Desafortunadamente en el caso en el que K tenga característica positiva no existe, hasta el momento, un teorema sobre resolución de singularidades que permita extender los resultados de Igusa, tampoco por el lado de la lógica tenemos un resultado sobre eliminación de cuantificadores que permita extender los resultados de Denef. Hay que decir que en el caso de característica positiva los resultados mas generales hasta el momento son obra de un colombiano, el profesor WILSON ZÚÑIGA de la Barry University [Z-G1], [Z-G2].

Incidentalmente, casi sin buscarlo, Igusa se da cuenta que las funciones zeta locales también están relacionadas con el numero de soluciones de congruencias módulo $\pi^m\mathcal{O}_K$, en efecto Igusa establece el siguiente resultado: si

$$P(T) = \sum_{m=0}^{\infty} N_m(q^{-n}t)^m$$

es la serie de Poincaré, donde N_m el número de soluciones de la congruencia $f(x) \equiv 0 \pmod{\pi^m\mathcal{O}_K}$, entonces

$$Z(s,f) = P(T) - t^{-1}(P(T)-1)$$

con lo cual nos enseña que la serie de Poincaré, en el caso de característica cero es en verdad una función racional de T, logrando con esto zanjar la conjetura de Borevich-Shafarevich en característica cero.

En 1994 Igusa introduce su *fórmula de la fase estacionaria π-ádica* [I4], un procedimiento iterativo que permite en muchos casos calcular las funciones zeta locales de una manera bastante explícita. En este artículo Igusa

[1] *Resolution of singularities of an algebraic variety over a field of characteristic zero*, Annals of Math. **79** (1964), 109–326.

sugiere que un estudio más cuidadoso de su formula podría conducir a una nueva demostración de la racionalidad de las funciones zeta locales. Animado por esta sugerencia, Wilson Zúñiga ha podido establecer sus resultados en característica arbitraria.

2.1. Medida de Haar en K

Recordemos algunas nociones y resultados básicos de la teoría de la medida. Sea G un grupo topológico abeliano localmente compacto. Un resultado fundamental de A. Haar [N] afirma la existencia de una medida regular de Borel μ, que llamamos medida de Haar, que tiene las siguientes propiedades

- μ es no nula
- para todo E conjunto de Borel $\mu(aE) = \mu(E)$, para todo $a \in G$
- las funciones continuas de valor complejo y soporte compacto son μ integrables
- $$\int_G f(x)\, d\mu = \int_G f(ax)\, d\mu \qquad \text{para todo } a \in G$$
  para toda f que sea μ integrable

Además, si $A \subset G$ es abierto y no vacío $\mu(A) > 0$, y si $B \subset G$ es compacto $\mu(B) < \infty$. Esta medida es única salvo por múltiplos constantes positivos.

Por otro lado, si K es un cuerpo local no arquimediano, entonces por lo visto en el capítulo 1, $(K, +)$ es un grupo topológico abeliano localmente compacto. Luego existe una medida de Haar para el grupo $(K, +)$, y como $\mathcal{O}_K$ es abierto compacto, podemos normalizar la medida de tal forma que $\mu(\mathcal{O}_K) = 1$.

Determinemos ahora el valor de la medida de los conjuntos $\pi^m\mathcal{O}_K$, con $m \in \mathbb{Z}$. Como $\mathcal{O}_K$ admite una descomposición como unión disyunta de un numero finito de clases de equivalencia $\text{mód}\,\pi\mathcal{O}_K$

$$\mathcal{O}_K = \bigcup_{a \in \mathcal{O}_K/\pi\mathcal{O}_K} (a + \pi\mathcal{O}_K),$$

y como $\mathcal{O}_K/\pi\mathcal{O}_K \simeq \mathbb{F}_q$ y $\mu(a + \pi\mathcal{O}_K) = \mu(\pi\mathcal{O}_K)$ obtenemos que $\mu(\pi\mathcal{O}_K) = q^{-1}$. De manera análoga, si $n > 0$ se tiene que $\mu(\pi^n\mathcal{O}_K) = q^{-n}$ y en el caso en que $n < 0$ como $[\pi^n\mathcal{O}_K : \mathcal{O}_K] = q^{-n}$ tenemos que $\mu(\pi^n\mathcal{O}_K) = q^{-n}$ también en este caso. Luego

Lema 2.1.
$$\mu(\pi^n\mathcal{O}_K) = q^{-n} \qquad \text{para todo } n \in \mathbb{Z}.$$

Esta medida la notaremos con $|dx|$.

Ahora como $K^\times$ resulta ser un grupo multiplicativo localmente compacto, existe también una medida de Haar $\mu^\times$, la cual supondremos normalizada de manera que $\mu^\times(\mathcal{O}_K^\times) = 1$.

Verifiquemos que ésta es la medida definida por

$$A \mapsto \int_A \frac{1}{1-q^{-1}} \frac{|dx|}{|x|_K};$$

primero veamos que esta medida es invariante por multiplicaciones de elementos de $K^\times$. Sea $\alpha \in K^\times$ y haciendo el cambio de variables $x = \alpha z$ tenemos que

$$\begin{aligned} \int_{\alpha A} \frac{1}{1-q^{-1}} \frac{|dx|}{|x|_K} &= \int_A \frac{1}{1-q^{-1}} \frac{|\alpha|_K |dz|}{|\alpha|_K |z|_K} \\ &= \int_A \frac{1}{1-q^{-1}} \frac{|dz|}{|z|_K}; \end{aligned}$$

luego esta medida es efectivamente invariante por multiplicaciones. Ahora bien

$$\begin{aligned} \int_{\mathcal{O}_K^\times} \frac{1}{1-q^{-1}} \frac{|dx|}{|x|_K} &= \frac{1}{1-q^{-1}} \int_{\mathcal{O}_K^\times} \frac{|dx|}{|x|_K} \\ &= \frac{1}{1-q^{-1}} \int_{\mathcal{O}_K^\times} |d^\times x| = 1; \end{aligned}$$

por lo tanto,

$$|d^\times x| = 1 \frac{1}{1-q^{-1}} \frac{|dx|}{|x|_K}$$

2.2. El espacio de funciones de Schwartz-Bruhat

Recordemos que hemos dicho que $\Phi(x) : K^n \to \mathbb{C}$ se llama una función, de Schwartz-Bruhat si es localmente constante y tiene soporte compacto. Como veremos en nuestro caso estas funciones tienen una estructura bastante elemental. Un primer resultado sera su clasificación cuando $n = 1$.

Lema. Sea $\Phi(x) : K \to \mathbb{C}$ una función de Schwartz-Bruhat, entonces $\Phi(x)$ es una combinación $\mathbb{C}$-lineal de funciones características de conjuntos de la forma $a + \pi^r \mathcal{O}_K$.

Demostración. Sea

$$\Phi(x) = \alpha_1 I_{a_1,r_1}(x) + \cdots + \alpha_l I_{a_l,r_l}(x) \quad \alpha_i \neq 0$$

donde $I_{a_i,r_i}(x)$ es la función característica del conjunto $a_i + \pi^{r_i}\mathcal{O}_K$. Sin pérdida de generalidad, podemos asumir que los $a_i + \pi^{r_i}\mathcal{O}_K$ son disyuntos dos a dos.

Luego $\{x \in K \mid \Phi(x) \neq 0\} = \bigcup_{i=1}^{l} a_i + \pi^{r_i}\mathcal{O}_K$, y por lo tanto, la clausura topológica de $\{x \in K \mid \Phi(x) \neq 0\}$ es $\bigcup_{i=1}^{l} a_i + \pi^{r_i}\mathcal{O}_K$ ya que estos son cerrados. Como cada $a_i + \pi^{r_i}\mathcal{O}_K$ es compacto tenemos que la clausura de $\{x \in K \mid \Phi(x) \neq 0\}$ es compacta, es decir, $\Phi(x)$ tiene soporte compacto. Por otro parte, $\Phi(x)$ es claramente localmente constante.

Recíprocamente sea $\Phi(x) : K \to \mathbb{C}$ localmente constante y con soporte compacto. Sea $Sop(f)$ la clausura topológica de $\{x \in K \mid \Phi(x) \neq 0\}$, luego $Sop(f)$ es compacto. Por otro lado, para todo $x \in Sop(f)$ existe una vecindad de x de la forma $x+\pi^{r_x}\mathcal{O}_K$, con $r_x \in \mathbb{Z}$ tal que $\Phi(x)$ es constante en $x+\pi^{r_x}\mathcal{O}_K$, digamos igual a α_x. Luego

$$Sop(f) \subset \bigcup_{x \in Sop(f)} x + \pi^{r_x}\mathcal{O}_K,$$

y como $Sop(f)$ es compacto existe un conjunto finito $x_1, \ldots, x_l$ tal que

$$Sop(f) = \bigcup_{i=1}^{l} x_i + \pi^{r_{x_i}}\mathcal{O}_K$$

y, nuevamente, no hay pérdida de generalidad, en suponer que los $x_i + \pi^{r_{x_i}}\mathcal{O}_K$ son disyuntos. Por consiguiente,

$$\Phi(x) = \alpha_{x_1} I_{x_1, r_{x_1}}(x) + \cdots + \alpha_{x_l} I_{x_l, r_{x_l}}(x)$$

$\square$

La transición de $n = 1$ a $n > 1$ la dejamos al cuidado del lector.

En particular cualquier función de Schwartz-Bruhat es continua e integrable.

2.3. Cuasicaracteres en $K^\times$

En esta sección veremos de donde provienen el término $\chi(ac(f(x)))|f(x)|_K^s$. Un cuasicarácter ω en $K^\times$ es un homomorfismo continuo

$$\omega : K^\times \to \mathbb{C}^\times$$

no necesariamente acotado. Notamos con $\Omega(K^\times)$ al conjunto de todos los cuasicaracteres. Sea $\mathbb{T} = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| = 1\}$, y observemos que como $\mathcal{O}_K^\times$ es un subgrupo compacto de $K^\times$ y ω es continuo, necesariamente $\omega(\mathcal{O}_K^\times)$ es un subgrupo compacto de $\mathbb{C}^\times$, luego $\omega(\mathcal{O}_K^\times) \subset \mathbb{T}$.

Con esto pasemos a determinar la estructura de un cuasicarácter arbitrario.

Caso 1 $\omega(\mathcal{O}_K^\times) = \{1\}$

En este caso $\omega(x)$ depende solo de $|x|_K$. En efecto, sean $x, y \in K^\times$ con $|x|_K = |y|_K$, entonces $|xy^{-1}|_K = 1$ y así $xy^{-1} \in \mathcal{O}_K^\times$; luego $1 = \omega(xy^{-1}) = \omega(x)\omega(y)^{-1}$, es decir $\omega(x) = \omega(y)$.

Sea $\Gamma_K = \{|x|_K \mid x \in K^\times\}$, entonces $\Gamma_K = \{q^{-n} \mid n \in \mathbb{Z}\}$ y, por consiguiente, la aplicación $\Gamma_K \to \mathbb{C}^\times$, dada por $|x|_K \mapsto \omega(x)$, es un homomorfismo, y como Γ_K es generado por q^{-1} el homomorfismo está determinado de manera única por su valor en $q^{-1} = \omega(\pi)$. Sea, pues, $\omega(\pi) = z$, de modo que existe $s \pmod{2\pi i/\ln q}$ tal que $z = q^{-s}$; por lo tanto si $x = \pi^n u$, con $u \in \mathcal{O}_K^\times$, entonces

$$\omega(x) = \omega(\pi^n u) = \omega(\pi)^n = q^{-ns} = |x|_K^s$$

De modo que, entre otras cosas, la verdadera variable a tomar es q^{-s} y no s.

Caso 2 $\omega(\mathcal{O}_K^\times) \neq \{1\}$

Entonces $\omega \restriction \mathcal{O}_K^\times$ es un carácter en $\mathcal{O}_K^\times$, y hagamos $\omega \restriction \mathcal{O}_K^\times = \chi$. De esta manera sea $\omega'(x) = \chi(ac(x))$. Entonces $\omega(x)\omega'(x)^{-1}$ es un carácter de $K^\times$ trivial en $\mathcal{O}_K^\times$, por lo tanto, existe $s \pmod{2\pi i/\ln q}$ tal que $\omega(x)\omega'(x)^{-1} = |x|_K^s$, y finalmente

$$\omega(x) = \chi(ac(x))|x|_K^s.$$

Por lo tanto tenemos

Lema 2.2. Para todo $\omega \in \Omega(K^\times)$ existe un único χ carácter de $\mathcal{O}_K^\times$ y $s \pmod{2\pi i/\ln q}$ tal que $\omega(x) = \chi(ac(x))|x|_K^s$.

Luego

$$\begin{aligned} Z_\Phi(s, \chi, f) &= \int_{K^n} \Phi(x)\chi(ac(f(x)))|f(x)|_K^s\,|dx| \\ &= \int_{K^n} \Phi(x)\omega(f(x))\,|dx| \\ &= Z_\Phi(\omega, f) \end{aligned}$$

y, en consecuencia, estudiar a $Z_\Phi(\omega, f)$, es lo mismo que estudiar a $Z_\Phi(s, \chi, f)$.

Clarifiquemos aún más la estructura de los caracteres.

Lema 2.3. Sea $\chi : \mathcal{O}_K^\times \to \mathbb{T}$ un carácter. Entonces $\chi(\mathcal{O}_K^\times)$ es finito.

Demostración. Tenemos la cadena de subgrupos

$$\{1\} \subset \cdots \subset 1 + \pi\mathcal{O}_K \subset {\mathcal{O}_K}^\times$$

los cuales también son abiertos. Como $\chi(1 + \pi^n\mathcal{O}_K)$ es un subgrupo multiplicativo de $\mathbb{T}$, χ es continuo y como una vecindad bastante pequeña de $\{1\}$ no puede contener otro subgrupo que $\{1\}$, entonces para n bastante grande se tiene que $\chi(1+\pi^n\mathcal{O}_K)=\{1\}$. El mínimo n para el que sucede esto se llama el *conductor* de χ y se denota con c_χ. Luego si $a\equiv b \pmod{\pi^{c_\chi}\mathcal{O}_K}$. se tiene entonces que $\chi(a)=\chi(b)$, de modo que χ es esencialmente un carácter del grupo finito $\mathcal{O}_K^\times/1+\pi^{c_\chi}\mathcal{O}_K$ □

2.4. Propiedades analíticas de $Z_\Phi(s,\chi,f)$

Proposición 2.1. La integral

$$Z_\Phi(s,\chi,f)=\int_{K^n}\Phi(x)\chi(ac(f(x)))|f(x)|_K^s\,|dx|,$$

converge para $Re(s)>0$.

Demostración. Sea $s=\sigma+it$. Podemos suponer que $\Phi(x)$ es la función característica de $\pi^{m_1}\mathcal{O}_K\times\cdots\times\pi^{m_n}\mathcal{O}_K$ y no hay perdida de generalidad en suponer que m_1 es el mayor de los enteros $m_1,\ldots,m_n$, luego

$$\pi^{m_1}\mathcal{O}_K\times\cdots\times\pi^{m_n}\mathcal{O}_K\subseteq\left(\pi^{m_1}\mathcal{O}_K\right)^n,$$

por lo tanto el valor absoluto de la integral es máximo

$$\begin{aligned}\int_{\pi^{m_1}\mathcal{O}_K\times\cdots\times\pi^{m_n}\mathcal{O}_K}|f(x)|_K^\sigma\,|dx|&\le\int_{\left(\pi^{m_1}\mathcal{O}_K\right)^n}|f(x)|_K^\sigma\,|dx|,\\ &=\int_{\bigcup_{m=m_1}^\infty f^{-1}\left(\pi^m\mathcal{O}_K\smallsetminus\pi^{m+1}\mathcal{O}_K\right)}|f(x)|_K^\sigma\,|dx|\\ &=\sum_{m=m_1}^\infty q^{-m\sigma}\mu\big(f^{-1}\big(\pi^m\mathcal{O}_K\smallsetminus\pi^{m+1}\mathcal{O}_K\big)\big)\end{aligned}$$

pero $\mu\big(f^{-1}(\pi^m\mathcal{O}_K)\big)\le q^{-mn+m_1-m}\le q^{-m_1n}$, luego

$$\sum_{m=m_1}^\infty q^{-m\sigma}\mu\big(f^{-1}\big(\pi^m\mathcal{O}_K\smallsetminus\pi^{m+1}\mathcal{O}_K\big)\big)\le q^{-m_1n}\sum_{m=m_1}^\infty\left(q^{-\sigma}\right)^m$$

suma que converge para $\sigma>0$. □

Ahora investigaremos las propiedades analíticas de $Z_\Phi(s,\chi,f)$. Para esto invocaremos un criterio que implica que una función definida por una integral en un grupo topológico localmente compacto es analítica.

Sea G un grupo topológico localmente compacto con medida de Haar dx. Sea $D\subseteq\mathbb{C}$ una región y sea $h:G\times D\to\mathbb{C}$ una función continua tal que:

(1) Para $x\in G$ fijo, $h(x,s)$ es una función analítica en D;

(2) Para $s \in D$ fijo, $h(x,s)$ y $h_s(x,s)$ son integrables respecto a dx, donde $h_s(x,s)$ denota la derivada de $h(x,s)$ respecto a s.

Podemos entonces definir la función

$$g(s) := \int_G h(x,s)\,|dx| \qquad (s \in D), \tag{2.1}$$

y preguntarnos:

(1) ¿Cuándo g es analítica en D?

(2) ¿Cuándo $g_s(s) = \int_G h_s(x,s)$?

Definición. Sean G, D y h como arriba. Si $E \subseteq D$ entonces decimos que (2.1) *converge uniformemente en* E si, dado $\varepsilon > 0$, existe un conjunto compacto $C = C(\varepsilon, E)$, tal que

$$\Big|\int_{G \smallsetminus C} h(x,s)\,|dx|\Big| < \varepsilon$$

para todo $s \in E$. Decimos que (2.1) converge *uniformemente en subconjuntos compactos de* D si esta converge uniformemente en todo subconjunto compacto de D.

Tenemos el siguiente resultado

Teorema. [Gs, pág. 136] Sean h, g, G y D como arriba. Si

$$\int_G h(x,s)\,|dx|$$

converge uniformemente en subconjuntos compactos de D. Entonces $g(s)$ es analítica en D y

$$g_s(s) = \int_G h_s(x,s)\,|dx|$$

En nuestro caso $h(x,s) = \Phi(x)\chi(ac(f(x)))|f(x)|_K^s$ cumple las condiciones. Solo resta verificar la convergencia uniforme en subconjuntos compactos del semiplano $Re(s) > 0$. Así si $\delta > 0$, es suficiente ver que la integral

$$Z(s) = \int_{K^n} \Phi(x)\chi(ac(f(x)))|f(x)|_K^s\,|dx|$$

converge uniformemente para $Re(s) \geq \delta$.

Sin pérdida de generalidad podemos suponer que $\Phi(x)$ es la función característica de $\pi^{m_1}\mathcal{O}_K \times \cdots \times \pi^{m_n}\mathcal{O}_K$. Entonces como vimos antes

$$\Big|\int_{K^n} \Phi(x)\chi(ac(f(x)))|f(x)|_K^s\,|dx|\Big| \leq \frac{q^{-m_1(n+\sigma)}}{1-q^{-\sigma}};$$

ahora si $l > m_1$ es un entero que satisface

$$q^{-m_1(n+\delta)}\frac{\left(1-q^{(l-m_1)(n+\delta)}\right)}{1-q^{-\delta}} < \varepsilon,$$

entonces

$$\left|\int_{K^n \smallsetminus \left(\pi^l \mathcal{O}_K\right)^n} \Phi(x)\chi(ac(f(x)))|f(x)|_K^s\,|dx|\right| < \varepsilon$$

y claramente $\left(\pi^l \mathcal{O}_K\right)^n$ es compacto.

Por lo tanto tenemos el siguiente resultado.

Teorema 2.2. $Z_\Phi(s,\chi,f)$ es una función analítica para $Re(s) > 0$.

2.5. Relación con la serie de Poincaré

Notaremos con $Z(s,\chi,f)$ a $Z_\Phi(s,\chi,f)$ cuando Φ es la función característica de $\mathcal{O}_K^n$, también si $\chi = \chi_{triv}$, el carácter trivial, notaremos a $Z(s,\chi,f)$ por $Z(s,f)$, es decir,

$$Z(s,f) = \int_{\mathcal{O}_K^n} |f(x)|_K^s\,|dx|.$$

Sea también

$$N_m = Card\{x \pmod{\pi^m \mathcal{O}_K} \mid f(x) \equiv 0 \pmod{\pi^m \mathcal{O}_K}\}$$

y

$$P(t) = \sum_{m=0}^{\infty} N_m (q^{-n}t)^m \qquad \text{donde } N_0 = 1$$

Teorema 2.3. $Z(s,f) = P(t) - t^{-1}(P(t)-1)$ donde $t = q^{-s}$

Demostración. Primero observemos que

$$\begin{aligned} f^{-1}(\pi^m \mathcal{O}_K) &= \{x \in \mathcal{O}_K^n \mid f(x) \equiv 0 \pmod{\pi^m \mathcal{O}_K}\} \\ &= \bigcup_{a \in N_m} (a + (\pi^m \mathcal{O}_K)^n); \end{aligned}$$

por lo tanto,

$$\begin{aligned} \mu(f^{-1}(\pi^m \mathcal{O}_K)) &= N_m \mu((\pi^m \mathcal{O}_K)^n); \\ &= N_m q^{-nm}; \end{aligned}$$

luego, como

$$Z(s,f)=\int_{\mathcal{O}_K^n}|f(x)|_K^s\,|dx|=\int_{\bigcup\limits_{m=0}^{\infty}f^{-1}(\pi^m\mathcal{O}_K)\smallsetminus f^{-1}(\pi^{m+1}\mathcal{O}_K)}|f(x)|_K^s\,|dx|$$

y es claro que si $x\in f^{-1}(\pi^m\mathcal{O}_K)\smallsetminus f^{-1}(\pi^{m+1}\mathcal{O}_K)$, entonces $|f(x)|_K=q^{-m}$. En consecuencia,

$$\begin{aligned}Z(s,f)=\int_{\mathcal{O}_K^n}|f(x)|_K^s\,|dx|&=\sum_{m=0}^{\infty}q^{-ms}\mu\left(f^{-1}(\pi^m\mathcal{O}_K)\smallsetminus f^{-1}(\pi^{m+1}\mathcal{O}_K)\right)\\&=\sum_{m=0}^{\infty}q^{-ms}(N_mq^{-nm}-N_{m+1}q^{-n(m+1)})\\&=\sum_{m=0}^{\infty}N_m(q^{-n}t)^m\ -t^{-1}\Big(\sum_{m=0}^{\infty}N_{m+1}(q^{-n}t)^{m+1}\Big)\\&=P(t)-t^{-1}(P(t)-1)\end{aligned}$$

□

Por lo tanto, $Z(s,f)$ es una función racional de t si, y sólo si $P(t)$ lo es. Esta es la relación entre la función zeta local de Igusa y la serie de Poincaré.

2.6. Sumas exponenciales

A manera de información para el lector enunciaremos la conexión entre las funciones zeta locales de Igusa y las sumas exponenciales. Sea

$$F^*(i^*)=\int_{\mathcal{O}_K^n}\Psi(i^*f(x))\,|dx|,$$

la suma exponencial generalizada. Recordemos que estas integrales aparecen por primera vez en el trabajo de A. Weil. Ψ denota aquí un carácter aditivo de K que es trivial en $\mathcal{O}_K$ y no trivial en $\pi^{-1}\mathcal{O}_K$. Sea también $i^*=\pi^{-e}u$, donde $e\geq 0$ y $u\in\mathcal{O}_K^\times$.

Sea

$$Z(s,f)=\int_{\mathcal{O}_K^n}|f(x)|_K^s\,|dx|;$$

como hemos visto $Z(s,f)$ es una serie de potencias en t. Notaremos el coeficiente de t^m en $Z(s,f)$ por $Coef_{t^m}Z(s,f)$.

Lema 2.4.

$$F^*(i^*)=q^{-ne}\sum_{\xi(\ \ (\text{mód }\pi^e\mathcal{O}_K))^n}\Psi(i^*f(\xi)).$$

Demostración. Primero observemos que como $e \geq 0$, entonces $\mathcal{O}_K$ es una unión disyunta de clases módulo $\pi^e\mathcal{O}_K$, así

$$\mathcal{O}_K^n = \bigcup_{\xi(\pmod{\pi^e\mathcal{O}_K})^n} \Big(\xi + (\pmod{\pi^e\mathcal{O}_K})^n\Big),$$

así

$$F^*(i^*) = \sum_{\xi(\pmod{\pi^e\mathcal{O}_K})^n} \int_{\xi(\pmod{\pi^e\mathcal{O}_K})^n} \Psi(i^* f(x))\,|dx|;$$

$$F^*(i^*) = q^{-ne} \sum_{\xi(\pmod{\pi^e\mathcal{O}_K})^n} \int_{\mathcal{O}_K^n} \Psi(i^* f(\xi + \pi^e x))\,|dx|;$$

ahora el desarrollo de Taylor para $f(\xi + \pi^e x)$ es

$$f(\xi + \pi^e x) = f(\xi) + \pi^e\Big(\text{términos de grado} \geq 1\Big)$$

luego como $i^* = \pi^{-e}u$ y Ψ es trivial en $\mathcal{O}_K$ tenemos que, para $x \in \mathcal{O}_K$

$$\Psi(i^* f(\xi + \pi^e x)) = \Psi(i^*)$$

y de aquí el resultado ya sigue. □

Ahora citamos sin demostración la siguiente proposición

Proposición 2.2 (Prop. 1.4.4 en [D2]).

$$\begin{aligned} F^*(\pi^{-e}u) &= 1 + Coef_{t^{e-1}} \frac{(t-q)Z(s,f)}{(q-1)(1-t)} \\ &+ \sum_{\chi \neq \chi_{triv}} g_{\chi^{-1}} \chi(u) Coef_{t^{m-c_\chi}} Z(s,\chi,f) \end{aligned}$$

donde c_χ es el conductor de χ y g_χ es la suma gaussiana

$$g_\chi = (q-1)^{-1} q^{-1-c_\chi} \sum_{v \in \left(\mathcal{O}_K/\pi^{c_\chi}\mathcal{O}_K\right)^\times} \chi(u)\Psi(\pi^{-c_\chi}v)$$

2.7. Un caso clásico

En este apartado mostraremos una conexión entre las funciones zeta locales y la clásica función zeta de Riemann.

Calculemos primero la siguiente integral

$$\int_{\mathbb{Z}_p} |x|_p^s\,|dx|.$$

Como $\mathbb{Z}_p = \cup_{i=0}^{\infty} p^i\mathbb{Z}_p \setminus p^{i+1}\mathbb{Z}_p$ tenemos que

$$\begin{aligned}
\int_{\mathbb{Z}_p} |x|_p^s \, |dx| &= \sum_{i=0}^{\infty} \int_{p^i\mathbb{Z}_p \setminus p^{i+1}\mathbb{Z}_p} |x|_p^s \, |dx| \\
&= \sum_{i=0}^{\infty} p^{-is} \mu(p^i\mathbb{Z}_p \setminus p^{i+1}\mathbb{Z}_p) \\
&= \sum_{i=0}^{\infty} p^{-is}(p^{-i} - p^{-i-1}) \\
&= (1-p^{-1}) \sum_{i=0}^{\infty} (p^{-1-s})^i \\
&= \frac{1-p^{-1}}{1-p^{-1-s}}
\end{aligned}$$

Esta integral es bastante conocida, aparece ya en la tesis de J. TATE[2]

Sea ahora

$$\zeta_p(s) = \int_{\mathbb{Q}_p^\times} \Phi(x) |x|_p^x \, |d^\times x|,$$

donde $\Phi(x)$ es la función característica de $\mathbb{Z}_p$. Entonces

$$\begin{aligned}
\zeta_p(s) &= \int_{\mathbb{Z}_p \setminus \{0\}} \frac{1}{1-p^{-1}} \frac{|x|_p^s}{|x|_p} \, |dx| \\
&= \frac{1}{1-p^{-1}} \int_{\mathbb{Z}_p \setminus \{0\}} |x|_p^{s-1} \, |dx| \\
&= \frac{1}{1-p^{-1}} \frac{1-p^{-1}}{1-p^{-1-s+1}} \\
&= \frac{1}{1-p^{-s}}
\end{aligned}$$

Por lo tanto,

$$\prod_p \zeta_p(s) = \prod_p \frac{1}{1-p^{-s}} = \zeta(s),$$

la clásica función Zeta de Riemann.

2.8. La fórmula de la fase estacionaria de Igusa

Las integrales oscilantes del tipo

$$I(\lambda) = \int_{\mathbb{R}^n} \Phi(x) \exp(i\lambda f(x)) \, dx \tag{2.2}$$

[2] *Fourier analysis in number fields and Hecke's zeta functions*, Ph.D. Thesis, Princeton 1950. disponible en [C-F]

tienen un papel importante en la física matemática, y el comportamiento asintótico de las mismas, es decir, el comportamiento de su magnitud para valores grandes del parámetro λ, constituyen un problema clásico con muchas aplicaciones prácticas. El principio de la fase estacionaria, véase por ejemplo la exposición que hace E. Acosta G. [A], establece que la contribución más importante al desarrollo asintótico de las integrales del tipo 2.2 proviene de los puntos críticos o singularidades de la fase $f(x)$, es decir, de los puntos que satisfacen $f(x) = 0$ y $\bigtriangledown f(x) = 0$.

Si K es un cuerpo localmente compacto existen varias funciones que son análogas a (2.2). Una de ellas es la función zeta local

$$\int_{K^n} \Phi(x)\chi(ac(f(x)))|x|_K{}^s\,|dx| \qquad Re(s) > 0 \tag{2.3}$$

En [I4] Igusa da una fórmula que permite calcular en ciertos casos las integrales $Z_\Phi(s,\chi,f)$, por analogía con el método clásico de la fase estacionaria, Igusa llamo al suyo el método de la *fase estacionaria para integrales π-ádicas*. A continuación describiremos este método.

En primer lugar, tomaremos a $\Phi(x)$ como la función característica de $\mathcal{O}_K^n$. Primero trataremos el caso $\chi = \chi_{triv}$, que es tal como aparece en [I4]. Sea

$$\mathcal{O}_K^n \xrightarrow{pr} (\mathcal{O}_K/\pi\mathcal{O}_K)^n \simeq \mathbb{F}_q^n$$

el homomorfismo canónico; sea $\overline{E}$ un subconjunto de $\mathbb{F}_q^n$, y sea $E = pr^{-1}(\overline{E})$. Fijemos un levantamiento R de $\mathbb{F}_q^n$ en $\mathcal{O}_K^n$, y sea $S(f,E)$ el subconjunto de R que se aplica biyectivamente en el conjunto de puntos singulares de $\overline{f}(x) = 0$ en $\overline{E}$. También sea

$$\nu(\overline{f},E) = q^{-n}\mathrm{Card}\{\overline{P} \in \overline{E} \mid \overline{f}(\overline{P}) \neq 0\}$$

$$\sigma(\overline{f},E) = q^{-n}\mathrm{Card}\{\overline{P} \in \overline{E} \mid \overline{f}(\overline{P}) = 0 \text{ y } \overline{P} \text{ es un punto regular}\}.$$

Con todo esto tenemos

Teorema 2.4 (Fórmula de la fase estacionaria de Igusa).

$$\int_E |f(x)|K^s\,|dx| = \nu(\overline{f},E) + \sigma(\overline{f},E)\frac{(1-q^{-1})q^{-s}}{(1-q^{-1}q^{-s})}$$
$$+ q^{-n}\sum_{\xi\in S(f,E)}\int_{\mathcal{O}_K^n} |f(\xi+\pi x)|_K^s\,|dx|$$

Demostración. Comencemos observando que $\overline{E}$ es la unión disyunta de los conjuntos

$$\overline{E}_\nu = \{\overline{P} \in \overline{E} \mid \overline{f}(\overline{P}) \neq 0\}$$
$$\overline{E}_\sigma = \{\overline{P} \in \overline{E} \mid \overline{f}(\overline{P}) = 0 \text{ y } \overline{P} \text{ es un punto regular}\}$$

$$\overline{E}_S = \{\overline{P} \in \overline{E} \mid \overline{f}(\overline{P}) = 0 \text{ y } \overline{P} \text{ es un punto singular}\}$$

Luego, como $E = pr^{-1}(\overline{E})$, tenemos que E es la unión disyunta de

$$E_\nu = \{P \in E \mid \overline{P} \in \overline{E}_\nu\}$$

$$E_\sigma = \{P \in E \mid \overline{P} \in \overline{E}_\sigma\}$$

$$E_S = \{P \in E \mid \overline{P} \in \overline{E}_S\}$$

de modo que

$$\int_E |f(x)|_K^s \, |dx| = \int_{E_\nu} |f(x)|_K^s \, |dx| + \int_{E_\sigma} |f(x)|_K^s \, |dx| + \int_{E_S} |f(x)|_K^s \, |dx|.$$

Cálculo sobre E_ν

Como

$$E_\nu = \bigcup_{\overline{P} \in \overline{E}_\nu} \big(P + (\pi \mathcal{O}_K)^n\big),$$

donde P es el representante que corresponde a $\overline{P}$, para todo $x \in E_\nu$ se tiene que $f(x) \notin \pi\mathcal{O}_K$. Por lo tanto, para todo $x \in E_\nu$ $f(x) \in \mathcal{O}_K^\times$. Por consiguiente, $|f(x)|_K = 1$, y así

$$\begin{aligned}
\int_{E_\nu} |f(x)|_K^s \, |dx| &= \int_{\bigcup\limits_{\overline{P} \in \overline{E}_\nu} \left(P + (\pi\mathcal{O}_K)^n\right)} |f(x)|_K^s \, |dx| \\
&= \sum_{\overline{P} \in \overline{E}_\nu} \int_{\left(P + (\pi\mathcal{O}_K)^n\right)} |f(x)|_K^s \, |dx| \\
&= \sum_{\overline{P} \in \overline{E}_\nu} \int_{\left(P + (\pi\mathcal{O}_K)^n\right)} |dx| \\
&= \sum_{\overline{P} \in \overline{E}_\nu} \mu\big(P + (\pi\mathcal{O}_K)^n\big) \\
&= q^{-n} \sum_{\overline{P} \in \overline{E}_\nu} 1 \\
&= q^{-n} \mathrm{Card}\{\overline{P} \in \overline{E} \mid \overline{f}(\overline{P}) \neq 0\}.
\end{aligned}$$

Cálculo sobre E_S

Por la definición de E_S tenemos que $E_S = \bigcup\limits_{\xi \in S} \big(\xi + (\pi\mathcal{O}_K)^n\big)$, donde la unión es disyunta. Luego

$$\int_{E_S} |f(x)|_K^s \, |dx| = \sum_{\xi \in S(f,E)} \int_{\xi + (\pi\mathcal{O}_K)^n} |f(x)|_K^s \, |dx|;$$

pero esta última integral es igual a

$$q^{-n} \sum_{\xi \in S(f,E)} \int_{\mathcal{O}_K^n} |f(\xi + \pi x)|_K^s \, |dx|.$$

Cálculo sobre E_σ

Como $E_\sigma = \{P \in E \mid \overline{P}$es un cero singular de $\overline{f}\}$ tenemos que

$$E_\sigma = \bigcup_{\overline{P} \in \overline{E}_\sigma} \big(P + (\pi \mathcal{O}_K)^n\big)$$

y así

$$\int_{E_\sigma} |f(x)|_K^s \, |dx| = \sum_{\overline{P} \in \overline{E}_\sigma} \int_{P+(\pi\mathcal{O}_K)^n} |f(x)|_K^s \, |dx|.$$

Tenemos la siguiente

Afirmación

Si $\overline{P} \in \overline{E}_\sigma$, entonces

$$\int_{P+(\pi\mathcal{O}_K)^n} |f(x)|_K^s \, |dx| = q^{-n} \frac{(1-q^{-1})q^{-s}}{(1-q^{-1}q^{-s})}.$$

Es claro que de esta afirmación se sigue el resultado □

Para demostrar la **Afirmación** adaptaremos un cálculo parecido que se hace en [D-H] para poder tener una demostración autocontenida y elemental. Comenzamos con un lema preliminar.

Lema 2.5. Sea $m \geq 0$ y $a \in \mathcal{O}_K$ tal que $f(a) \equiv 0 \pmod{\pi^m \mathcal{O}_K}$ y $f'(a) \not\equiv 0 \pmod{\pi \mathcal{O}_K}$, entonces existe un único $\xi \in \mathcal{O}_K$ tal que

$$f(\xi) = 0 \quad \text{y} \quad \xi \equiv a \pmod{\pi^m \mathcal{O}_K}.$$

Demostración. El caso $m = 1$ es el lema de Hensel 1.10, para $m > 1$ sea $g(y) = \pi^{-(m-1)} f(a + \pi^{m-1} y)$, como $f(a) \equiv 0 \pmod{\pi^m \mathcal{O}_K}$, entonces $g(y) \in \mathcal{O}_K[y]$ y como $g(0) \equiv 0 \pmod{\pi \mathcal{O}_K}$ y $g'(0) \equiv f'(a) \not\equiv 0 \pmod{\pi \mathcal{O}_K}$, existe por el lema de Hensel un único ζ tal que $g(\zeta) = 0$ y $\zeta \equiv 0 \pmod{\pi \mathcal{O}_K}$, luego $\xi = a + \pi^{m-1}\zeta$ es el indicado, como el lector podrá comprobar. □

Corolario. Sea $f(x) \in \mathcal{O}_K[x]$, $m \geq 0$. Sea $a \in \mathcal{O}_K$ tal que $f(a) \equiv 0 \pmod{\pi \mathcal{O}_K}$ y $f'(a) \not\equiv 0 \pmod{\pi \mathcal{O}_K}$, entonces existe un único $\xi \in \mathcal{O}_K$ tal que

$$\xi + \pi^m \mathcal{O}_K = \{x \in a + \pi \mathcal{O}_K \mid f(x) \equiv 0 \pmod{\pi^m \mathcal{O}_K}\}$$

Demostración. Por el lema anterior, aplicado a $f(a) \equiv 0 \pmod{\pi\mathcal{O}_K}$, $f'(a) \not\equiv 0 \pmod{\pi\mathcal{O}_K}$; existe un único $\xi \in \mathcal{O}_K$ tal que $f(\xi) = 0$ y $\xi \equiv a \pmod{\pi\mathcal{O}_K}$, veamos que este ξ satisface la condición pedida.

Sea $x \in \xi + \pi^m\mathcal{O}_K$, entonces $x \equiv \xi \pmod{\pi^m\mathcal{O}_K}$, por lo tanto $x \equiv \xi \pmod{\pi\mathcal{O}_K}$ y como $\xi \equiv a \pmod{\pi^m\mathcal{O}_K}$, entonces $x \in a+\pi\mathcal{O}_K$; ahora como $x \equiv \xi \pmod{\pi^m\mathcal{O}_K}$ entonces $f(x) \equiv f(\xi) \equiv 0 \pmod{\pi^m\mathcal{O}_K}$. Recíprocamente sea $x \in a + \pi\mathcal{O}_K$ tal que $f(x) \equiv 0 \pmod{\pi^m\mathcal{O}_K}$, como $x \equiv a \pmod{\pi\mathcal{O}_K}$ entonces $f'(x) \equiv f'(a) \not\equiv 0 \pmod{\pi\mathcal{O}_K}$, luego por el lema anterior existe un único $\zeta \in \mathcal{O}_K$ tal que $f(\zeta) = 0$ y $\zeta \equiv x \pmod{\pi^m\mathcal{O}_K}$, luego $\zeta \equiv x \pmod{\pi\mathcal{O}_K}$, así $\zeta \equiv a \pmod{\pi\mathcal{O}_K}$ y como la solución es única tenemos que $\zeta = \xi$, y así $x \in \xi + \pi^m\mathcal{O}_K$ $\square$

Ahora generalizamos el lema anterior a polinomios en varias variables.

Lema 2.6. Sea $f(x_1, \dots, x_n) \in \mathcal{O}_K[x_1, \dots, x_n]$ y $m \geq 0$, sea $a = (a_1, \dots, a_n) \in \mathcal{O}_K^n$ tal que $f(a) \equiv 0 \pmod{\pi\mathcal{O}_K}$ y $\partial f/\partial x_1(a) \not\equiv 0 \pmod{\pi\mathcal{O}_K}$. Sean $\xi_2, \dots, \xi_n \in \mathcal{O}_K$ con $\xi_i \equiv a_i \pmod{\pi\mathcal{O}_K}$ para $i = 2, \dots, n$, entonces existe $\xi_1 = \xi_{(\xi_2,\dots,\xi_n)} \in \mathcal{O}_K$, tal que para todo $x_2, \dots, x_n \in \mathcal{O}_K$ que satisfacen $x_i \equiv \xi_i \pmod{\pi\mathcal{O}_K}$ para $i = 2, \dots, n$ se tiene que

$$\xi_1 + \pi^m\mathcal{O}_K = \{x_1 \in a_1 + \pi\mathcal{O}_K \mid f(x_1, \dots, x_n) \equiv 0 \pmod{\pi^m\mathcal{O}_K}\}$$

Demostración. Se sigue inmediatamente del corolario anterior, ya que para todo $x_2, \dots, x_n \in \mathcal{O}_K$ con $x_i \equiv \xi_i \pmod{\pi^m\mathcal{O}_K}$ se tiene que $f(x_1, x_2, \dots, x_n) \equiv f(x_1, \xi_2, \dots, \xi_n) \pmod{\pi^m\mathcal{O}_K}$ y $f(a_1, \xi_2, \dots, \xi_n) \equiv f(a_1, a_2, \dots, a_n) \equiv 0 \pmod{\pi\mathcal{O}_K}$ y $\partial f/\partial x_1(a_1, \xi_2, \dots, \xi_n) \equiv \partial f/\partial x_1(a_1, a_2, \dots, a_n) \not\equiv 0 \pmod{\pi\mathcal{O}_K}$ $\square$

Tenemos el siguiente corolario del lema anterior

Corolario.

$$\{(x_1, \dots, x_n) \in a + (\pi\mathcal{O}_K)^n \mid f(x_1, \dots, x_n) \equiv 0 \pmod{\pi^m\mathcal{O}_K}\} =$$

$$\bigcup \big(\xi_{(\xi_2,\dots,\xi_n)}, \xi_2, \dots, \xi_n\big) + \big(\pi^m\mathcal{O}_K\big)^n$$

donde la unión es sobre todas las $(n-1)$-tuplas $(\xi_2 + \pi^m\mathcal{O}_K, \dots, \xi_n + \pi^m\mathcal{O}_K)$ con $\xi_i \equiv a_i \pmod{\pi\mathcal{O}_K}$, $i = 2, \dots, n$. En particular, como $|\pi\mathcal{O}_K/\pi^m\mathcal{O}_K| = q^{(m-1)}$ entonces

$$\mu\big(\{(x_1, \dots, x_n) \in a + (\pi\mathcal{O}_K)^n \mid f(x_1, \dots, x_n) \equiv 0 \pmod{\pi^m\mathcal{O}_K}\}\big) \\ = q^{(m-1)(n-1)}q^{-mn}$$

siempre y cuando $f(a) \equiv 0 \pmod{\pi\mathcal{O}_K}$ y $\partial f/\partial x_1(a) \not\equiv 0 \pmod{\pi\mathcal{O}_K}$

de la afirmación. Ahora sea $\overline{P} \in \overline{E}_\sigma$. Entonces $f(P) \equiv 0 \pmod{\pi\mathcal{O}_K}$ y existe $i \in \{1, \ldots, n\}$ tal que $\partial f/\partial x_1(P) \not\equiv 0 \pmod{\pi\mathcal{O}_K}$. No hay pérdida de generalidad en suponer que $i = 1$. Luego por el corolario anterior tenemos

$$\mu\big(\{x \in P + (\pi\mathcal{O}_K)^n \mid f(x) \equiv 0 \pmod{\pi^m\mathcal{O}_K}\}\big) = q^{-m-n+1},$$

Ahora,

$$\int_{P+(\pi\mathcal{O}_K)^n} |f(x)|_K^s\,|dx| = \sum_{m=1}^{\infty} \int\limits_{\substack{x\in P+(\pi\mathcal{O}_K)^n \\ f(x)\in\pi^m\mathcal{O}_K\smallsetminus\pi^{m+1}\mathcal{O}_K}} |f(x)|_K^s\,|dx|$$

$$= \sum_{m=1}^{\infty} t^m \int\limits_{\substack{x\in P+(\pi\mathcal{O}_K)^n \\ f(x)\in\pi^m\mathcal{O}_K\smallsetminus\pi^{m+1}\mathcal{O}_K}} |dx|$$

$$= \sum_{m=1}^{\infty} t^m\big(q^{-m-n+1} - q^{-m+1-n+1}\big) = q^{-n}(q-1)\sum_{m=1}^{\infty}\big(q^{-1}t\big)^m$$

$$= q^{-n}\frac{(1-q^{-1})t}{1-q^{-1}t}.$$

□

2.8.1. El caso $\chi \neq \chi_{triv}$

En [Z-G2] W. Zúñiga observa que la fórmula de la fase estacionaria, dada por Igusa originalmente para el caso $\chi = \chi_{triv}$, admite una generalización al caso de χ arbitrario y que la demostración dada originalmente por Igusa en [I4] se puede generalizar literalmente a este caso.

En este caso tenemos

Teorema 2.5. Con la misma notación que en 2.4, si $\chi \neq \chi_{triv}$, entonces

$$\int_E \chi(ac(f(x)))|f(x)|_K^s, |dx| = q^{-nc_\chi} \sum_{\{P\in E_\nu\} \pmod{\pi^{c_\chi}\mathcal{O}_K}} \chi(ac(f(P)))$$

$$+ q^{-n} \sum_{\xi\in S(f,E)} \int_{\mathcal{O}_K^n} \chi(ac(f(\xi+\pi x)))|f(\chi+\pi x)|_K^s\,|dx|$$

La demostración, en este caso nos es tan elemental, pues necesita un lema clave de Igusa, algo que es análogo al teorema de la función implícita, le sugerimos al lector que mire la demostración de Igusa en [I4].

2.9. El caso no arquimediano

Cuando K es un cuerpo local arquimediano, se define

$$Z_{\Phi}(s,f) := \int_{K^n} \Phi(x)|f(x)|^{\delta x}\, dx,$$

donde $\Phi(x)$ es una función C^{∞} con soporte compacto, $s \in \mathbb{C}$, $Re(s) > 0$, $\delta = 1$ si $K = \mathbb{R}$ y $\delta = 2$ si $K = \mathbb{C}$. Se prueba que $Z_{\Phi}(s,f)$ se puede extender a una función meromorfa en C cuyos polos son racionales. Esto se puede hacer bien sea por resolución de singularidades [At], o por la teoría de polinomios de Bernstein [B].

Capítulo 3

Racionalidad de la función zeta local de Igusa asociada a un polinomio cuasihomogéneo

Como dijimos antes, en [I4] Igusa introduce su *fórmula de la fase estacionaria.* En este artículo Igusa sugiere que un estudio mas cuidadoso de su fórmula podría conducir a una nueva demostración de las racionalidad de las funciones zeta locales, tal vez válida en cualquier característica. Animado por la sugerencia de Igusa, W. Zúñiga estudió el problema de la racionalidad de las funciones zeta locales asociadas a polinomios semicuasihomogéneos en característica arbitraria [Z-G1],obteniendo un primer resultado de carácter general en característica positiva y más recientemente, el de la racionalidad de las funciones zeta locales asociadas con polinomios no degenerados globalmente con respecto a su *poliedro de Newton* [Z-G2], logrando dar una descripción detallada de sus polos; en esta misma dirección J. Denef y K. Hoornaert encontraron, independientemente de W. Zúñiga, una fórmula explícita para la función zeta local asociada a un polinomio no degenerado respecto a su poliedro de Newton [D-H], [H]. En este capítulo expondremos parte de los trabajos de W. Zúñiga que hemos mencionado.

Sean $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$, n enteros positivos primos relativos. Un polinomio $f(x) \in \mathcal{O}_K[x]$, $x = (x_1, \ldots, x_n)$ se llama un polinomio *cuasihomogéneo* de peso d y exponentes $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ si satisface

$$f(t^{\alpha_1}x_1, \ldots, t^{\alpha_n}x_n) = t^d f(x_1, \ldots, x_n) \quad \text{para todo } t \in K.$$

Sea $f(x) \in K[x]$ y $V_f(K)$ su correspondiente K-hipersuperficie. $P \in K^n$ se llama una *singularidad aislada algebraicamente absoluta* si la única solución del sistema de ecuaciones

$$f(x) = \frac{\partial f}{\partial x_1}(x) = \ldots = \frac{\partial f}{\partial x_n}(x) = 0$$

sobre una clausura algebraica fija de K es el punto P.

Un polinomio $F(x)$ es llamado *semicuasihomogéneo* si éste tiene la forma $F(x) = f(x) + \sum b_i c_i(x)$, donde $f(x)$ es un polinomio cuasihomogéneo de peso d y exponentes $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$, y cada monomio $c_i(x) = x_1^{m_1} \cdots x_n^{m_n}$ satisface $\alpha_1 m_1 + \cdots + \alpha_n m_n > d$. En este caso $f(x)$ es llamado la parte cuasihomogénea de $F(x)$.

En [Z-G1], W. Zúñiga establece el siguiente resultado

Teorema 3.1. Sea $F(x) \in K[x]$ $x = (x_1, \ldots, x_n)$ un polinomio semicuasihomogéneo tal que el origen de K^n sea una singularidad aislada algebraicamente absoluta de $V_F(K)$. Sea $f(x)$ su parte cuasihomogénea la cual tiene peso d y exponentes $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$. Entonces la función zeta local de Igusa asociada a $F(x)$ es una función racional de $t = q^{-s}$. De manera más precisa,

$$\int_{\mathcal{O}_K^n} |F(x)|_K^s \, |dx| = \frac{L(t)}{(1 - q^{-1}t)(1 - q^{-|\alpha|}t^d)},$$

donde $|\alpha| = \alpha_1 + \cdots + \alpha_n$, Además el polinomio $L(t)$ puede ser calculado de manera efectiva.

En este mismo artículo W. Zúñiga introduce el siguiente índice de singularidad de un punto $P \in \mathcal{O}_K^n$ tal que $P \notin Sing_f(\mathcal{O}_K)$.

Definición. Sea $f(x) \in \mathcal{O}_K[x]$ $x = (x_1, \ldots, x_n)$ y $P \in \mathcal{O}_K^n$ definimos

$$L(f, P) := \operatorname{Inf}\{\upsilon(f(P)), \upsilon(\frac{\partial f}{\partial x_1}(P)), \ldots, \upsilon(\frac{\partial f}{\partial x_n}(P))\}$$

Como veremos enseguida este índice aparece asociado de manera natural a la fórmula de la fase estacionaria de Igusa; por otra parte, generaliza un índice introducido por A. Néron para la medida de la singularidad de un punto $P \in V_f(\mathcal{O}_K)$

$$l(f, P) = \operatorname{Inf}\{\upsilon(\frac{\partial f}{\partial x_1}(P)), \ldots, \upsilon(\frac{\partial f}{\partial x_n}(P))\}$$

Como muestra W. Zúñiga algo clave es que podamos acotar el índice $L(f, P)$ en subconjuntos D que sean preimágenes de algún subconjunto de $\mathbb{F}_q^n$ bajo el homomorfismo canónico, y tales que $D \cap Sing_f(\mathcal{O}_K) = \emptyset$. Esto lo logra W. Zúñiga en [Z-G1] utilizando la hipótesis de que el origen de K^n sea una singularidad aislada algebraicamente absoluta de $V_f(K)$. La idea en este caso es utilizar la correspondencia que produce el Nullstellensatz de Hilbert entre ideales radicales de $K[x_1, \ldots, x_n]$ y variedades irreducibles en Ω^n, donde Ω es una clausura algebraica de K.

En [Z-G2] W. Zúñiga encuentra como levantar la hipótesis de que el origen sea una singularidad aislada algebraicamente absoluta de $V_f(K)$. En este artículo generaliza algunos de los lemas utilizados en la demostración de 3.1, aunque el resultado como tal no aparece enunciado, así que para completez lo enunciaremos y demostraremos siguiendo las referencias [Z-G1] y [Z-G2] , en el caso cusihomogéneno.

Teorema 3.2 (Zúñiga-Galindo). Sea $f(x) \in K[x]$, $x = (x_1, \ldots, x_n)$ un polinomio cuasihomogéneo de peso d y exponentes $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ y tal que el único cero de su reducción módulo $\pi\mathcal{O}_K$ sea 0. Entonces la función zeta local de Igusa asociada a $f(x)$ es una función racional de t. De manera más precisa,

$$\int_{\mathcal{O}_K^n} |f(x)|_K^s \, |dx| = \frac{L(t)}{(1 - q^{-1}t)(1 - q^{-|\alpha|}t^d)}$$

donde $|\alpha| = \alpha_1 + \cdots + \alpha_n$.

La demostración la daremos en la siguientes secciones.

3.1. Preliminares

Sea L un anillo y $f(x) \in L[x]$, $x = (x_1, \ldots, x_n)$, denotemos con $V_f(L)$ a la correspondiente hipersuperficie, es decir

$$V_f(L) = \{(x_1, \ldots, x_n) \in L^n \mid f(x_1, \ldots, x_n) = 0\}$$

y por $Sing_f(L)$ al conjunto de los puntos singulares de $V_f(L)$, es decir

$$Sing_f(L) = \{(x_1, \ldots, x_n) \in V_f(L) \mid \frac{\partial f}{\partial x_i}(x_1, \ldots, x_n) = 0, \quad \text{para todo} \quad i = 1, \ldots, n\}$$

Dado $f(x) \in \mathcal{O}_K[x]$ tal que no todos sus coeficientes están en $\pi\mathcal{O}_K$, denotemos por $\overline{f}(x)$ al polinomio obtenido al reducir módulo $\pi\mathcal{O}_K$ los coeficientes de $f(x)$.

Sea ahora $P_1 = (y_1, \ldots, y_n) \in \mathcal{O}_K^n$, la aplicación $\Phi_{P_1} : K^n \to K^n$ dada por $\Phi_{P_1}(x_1, \ldots, x_n) = (y_1 + \pi x_1, \ldots, y_n + \pi x_n)$ es llamada una *dilatación.*

La *dilatación* de $f(x)$ en P_1 inducida por $\Phi_{P_1}(x)$ se define por

$$f_{P_1}(x) := \pi^{-e_{P_1}} f(P_1 + \pi x)$$

donde e_{P_1} es el mínimo orden de π en los coeficientes de $f(P_1 + \pi x)$.

La K-hipersuperficie $V_{f_{P_1}}(K)$ es llamada *la dilatación de* $V_f(K)$ *en* P_1 inducida por $\Phi_{P_1}(x)$.

El número e_{P_1} se llama *la multiplicidad aritmética de* $f(x)$ *en* P_1 por $\Phi_{P_1}(x)$.

El conjunto $S_1(P_1) := S(f_{P_1})$, donde $S(f_{P_1})$ es el levantamiento de $Sing_{\overline{f}_{P_1}}(\mathbb{F}_q)$, se llama *la primera generación de descendientes de* P_1.

Ahora definimos inductivamente $f_{P_1,\ldots,P_k}(x)$, $e_{P_1,\ldots,P_k}$ y $S_k(P_1)$ como sigue

$$f_{P_1,\ldots,P_k}(x) = \begin{cases} f(x), & \text{si } k = 0, \\ \pi^{-e_{P_1,\ldots,P_k}} f_{P_1,\ldots,P_{k-1}}(P_k + \pi x), & \text{si } k \geq 1. \end{cases} \tag{3.1}$$

donde $P_k \in S_{k-1}(P_1)$, $e_{P_1,\ldots,P_k}$ es el mínimo orden de π en los coeficientes de $f_{P_1,\ldots,P_{k-1}}(P_k + \pi x)$, y donde, para $k \geq 1$,

$$S_k(P_1) := \bigcup_{P_k \in S_{k-1}(P_1)} S(f_{P_1,\ldots,P_k})$$

se llama la *$k^{\underline{a}}$ generación de descendientes de* P_1, donde $S(f_{P_1,\ldots,P_k})$ es un levantamiento de $Sing_{\overline{f}_{P_1,\ldots,P_k}}(\mathbb{F}_q)$. Por la $0^{\underline{a}}$ generación de descendientes de P_1 entenderemos a $\{P_1\}$

Veamos una propiedad elemental del índice $L(f, P)$.

Lema 3.1. $L(f, P) = 0$ si, y sólo, si el polinomio

$$\overline{f}(x) = \alpha_0 + \sum_{j=1}^{n} \alpha_j(x_j - \overline{a}_j) + (\text{términos de grado } \geq 2)$$

satisface $\alpha_j \in \mathbb{F}_q^{\times}$ para algún $j = 0, \ldots, n$.

Demostración. El desarrollo de Taylor produce

$$f(x_1, \ldots, x_n) = f(P) + \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_j}(P)(x_j - a_j) + (\text{términos de grado } \geq 2)$$

luego como $L(f, P) = 0$ se tiene que $f(p) \in \mathcal{O}_K^{\times}$ o existe algún $j \in \{1, \ldots, n\}$ tal que $\partial f/\partial x_j(P) \in \mathcal{O}_K^{\times}$. □

A continuación acotamos el índice $L(f, P)$ en los conjuntos que nos interesan

Proposición 3.1 (Lema 2.2 de [Z-G2]). Sea $D \subseteq \mathcal{O}_K^n$ abierto y compacto, y sea $f(x) \in \mathcal{O}_K[x]$ un polinomio tal que $Sing_f(\mathcal{O}_K) \cap D = \emptyset$. Entonces existe una constante $C(f, D) \in \mathbb{N}$, que depende solo de f y D, tal que

$$L(f, P) \leq C(f, D), \quad \text{para todo} \quad P \in D$$

Demostración. Supongamos lo contrario, es decir $L(f, P)$ no es acotado en D. Luego existe una sucesión $\{Q_i\}$ de puntos de D que satisfacen $L(f, Q_i) \to \infty$, cuando $i \to \infty$. Como D es compacto, y la topología es métrica, esta sucesión tiene un punto límite $Q^* \in D$, y como v es una función continua, entonces $L(f, Q^*) = \infty$, es decir $Q^* \in Sing_f(\mathcal{O}_K)$, lo cual es una contradicción. □

En la proposición anterior no usamos el hecho de que D sea abierto. Sin embargo, lo pusimos en las hipótesis ya que en los siguientes lemas aplicaremos esta proposición a conjuntos abiertos y compactos.

Recordemos que por lo particular de la topología de K^n, un subconjunto de K^n es abierto y compacto si, y sólo si existe $m \geq 0$ tal que el es una unión finita de clases módulo $\pi^m \mathcal{O}_K$. En particular la preimagen de cualquier subconjunto de $\mathbb{F}_q^n$ bajo el homomorfismo canónico es un subconjunto abierto y compacto.

Lema 3.2 (Lema 2.3 de [Z-G2]). Sea $D \subseteq \mathcal{O}_K^n$ la preimagen bajo el homomorfismo canónico $\mathcal{O}_K \to \mathcal{O}_K/\pi\mathcal{O}_K$ de un subconjunto $\overline{D} \subseteq \mathbb{F}_q^n$ y sea $f(x) \in \mathcal{O}_K[x]$ un polinomio tal que $Sing_f(\mathcal{O}_K) \cap D = \emptyset$. Entonces

(i) $L(f_{P_1,\dots,P_k}, 0) \leq L(f, P_1 + \pi P_2 + \cdots + \pi^{k-1}P_k) - k$, para todo P_k, $k \geq 1$, que satisface:

  (H1) P_k pertenece a la $(k-1)^{\underline{a}}$ generación de descendientes de $P_1 \in S(f, D)$.

  (H2) P_k tiene al menos un descendiente en la $k^{\underline{a}}$ generación de descendientes de P_1.

(ii) Para cualquier $P_1 \in S(f, D)$, si $k \geq C(f, D) + 1$, entonces $S_k(P_1) = \emptyset$.

Demostración. (i)Observemos que por 3.1 se tiene

$$f(P_1 + \pi P_2 + \cdots + \pi^{k-1}P_k + \pi^k x) = \pi^{e_{P_1} + e_{P_1,P_2} + \cdots + e_{P_1,\dots,P_k}} f_{P_1,\dots,P_k}(x)$$

luego

$$f(P_1 + \pi P_2 + \cdots + \pi^{k-1}P_k) = \pi^{e_{P_1} + e_{P_1,P_2} + \cdots + e_{P_1,\dots,P_k}} f_{P_1,\dots,P_k}(0)$$

y

$$\pi^k \frac{\partial f}{\partial x_i}(P_1 + \pi P_2 + \cdots + \pi^{k-1}P_k) = \pi^{e_{P_1} + e_{P_1,P_2} + \cdots + e_{P_1,\dots,P_k}} \frac{\partial f_{P_1,\dots,P_k}}{\partial x_i}(0)$$

lo que fuerza a que

$$v(f_{P_1,\dots,P_k}(0)) = -(e_{P_1} + e_{P_1,P_2} + \cdots + e_{P_1,\dots,P_k}) + v(f(P_1 + \pi P_2 + \cdots + \pi^{k-1}P_k))$$

y

$$v(\frac{\partial f_{P_1,\dots,P_k}}{\partial x_i}(0)) = -(e_{P_1} + e_{P_1,P_2} + \cdots + e_{P_1,\dots,P_k}) + k + v(\frac{\partial f}{\partial x_i}(P_1 + \pi P_2 + \cdots + \pi^{k-1}P_k))$$

y como $P_1 \in S(f, D) \subseteq D$, entonces $P_1 + \pi P_2 + \cdots + \pi^{k-1}P_k \in D \subseteq (Sing_f(\mathcal{O}_K))^c$, de modo que $L(f, P_1 + \pi P_2 + \cdots + \pi^{k-1}P_k) < \infty$ y

$$L(f_{P_1,\dots,P_k}, 0) \leq -(e_{P_1} + e_{P_1,P_2} + \cdots + e_{P_1,\dots,P_k}) + k + L(f, P_1 + \pi P_2 + \cdots + \pi^{k-1}P_k);$$

por lo tanto, es suficiente ver que

$$e_{P_1,\ldots,P_l} \geq 2 \quad \text{para todo } l = 1, \ldots, k$$

y, para ver esto, aplicamos el desarrollo de Taylor a $f_{P_1,\ldots,P_{l-1}}(P_l + \pi x)$ para obtener

$$f_{P_1,\ldots,P_{l-1}}(P_l + \pi x) =$$
$$f_{P_1,\ldots,P_{l-1}}(P_l) + \pi \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial f_{P_1,\ldots,P_{l-1}}}{\partial x_j}(P_l)x_j + \pi^2(\text{términos de grado } \geq 2)$$

ahora bien, por (H1) $\overline{P}_l$ es un cero singular de $\overline{f}_{P_1,\ldots,P_{l-1}}$, luego

$$\upsilon(_{P_1,\ldots,P_{l-1}}(P_l)) \geq 1$$

y

$$\upsilon(\frac{\partial_{P_1,\ldots,P_{l-1}}}{\partial x_j}(P_l)) \geq 1 \qquad j = 1, \ldots, n;$$

ahora si $\upsilon(_{P_1,\ldots,P_{l-1}}(P_l)) = 1$ entonces $\pi^{-1}\overline{f}_{P_1,\ldots,P_{l-1}}(x)$ sería una constante no cero; luego P_l no tendría descendientes, contradiciendo (H2). Por consiguiente $\upsilon(_{P_1,\ldots,P_{l-1}}(P_l)) \geq 2$ y

$$f_{P_1,\ldots,P_{l-1}}(P_l + \pi x) = \pi^2 h(x), \qquad \text{pero}$$

$$f_{P_1,\ldots,P_{l-1}}(P_l + \pi x) = \pi^{e_{P_1,\ldots,P_l}} f_{P_1,\ldots,P_l}(x).$$

Como en $f_{P_1,\ldots,P_l}(x)$ el máximo orden de π en sus coeficientes es 0, tendremos

$$e_{P_1,\ldots,P_l} \geq 2 \qquad ,\text{para todo } l = 1, \ldots, k,$$

y, en consecuencia,

$$L(f_{P_1,\ldots,P_k}, 0) \leq L(f, P_1 + \pi P_2 + \cdots + \pi^{k-1} P_k) - k.$$

(ii) Sigue de manera inmediata de los resultados de (i).

□

Por último tenemos el siguiente

Lema 3.3 (Lema 2.4 de [Z-G2]). Sea $D \subseteq \mathcal{O}_K^n$ la preimagen bajo el homomorfismo canónico de un subconjunto $\overline{D} \subseteq \mathbb{F}_q^n$. Sea $f(x) \in \mathcal{O}_K[x]$ un polinomio tal que $Sing_f(\mathcal{O}_K) \cap D = \emptyset$, entonces

$$\int_D |f(x)|_K^s \, |dx| = \frac{T(q^{-s})}{1 - q^{-1}q^{-s}}$$

donde $T(q^{-s})$ es un polinomio en q^{-s} con coeficientes racionales.

Demostración. Sea $I_1 := S(f,D)$; de manera inductiva definamos, para $k \geq 2$,

$$I_k := \{(P_1,\dots,P_k) \mid (P_1,\dots,P_{k-1}) \in I_{k-1}, P_k \in S(f_{(P_1,\dots,P_{k-1})})\};$$

sea también $E(P_1,\dots,P_k) = e_{P_1} + e_{P_1,P_2} + \cdots + e_{P_1,\dots,P_k}$, si $m = C(f,D)+1$. Entonces por el lema anterior $I_{m+1} = \emptyset$, ya que $S(P_1,\dots,P_m) = \emptyset$ para todo $(P_1,\dots,P_m) \in I_m$. Luego aplicando **FFE** $m+1$ veces se obtiene

$$\begin{aligned}\int_D |f(x)|_K^s \,|dx| = \nu(\overline{f},D) + \sigma(\overline{f},D)\frac{(1-q^{-1})t}{1-q^{-1}t} \\ + \sum_{k=1}^{m}\Big(\sum_{(P_1,\dots,P_k)\in I_k} \nu(\overline{f}_{(P_1,\dots,P_k)} t^{E(P_1,\dots,P_k)})\Big) \\ + \frac{(1-q^{-1})t}{1-q^{-1}t}\sum_{k=1}^{m}\Big(\sum_{(P_1,\dots,P_k)\in I_k} \sigma(\overline{f}_{(P_1,\dots,P_k)} t^{E(P_1,\dots,P_k)})\Big)\end{aligned}$$

□

3.2. Racionalidad de la función zeta

Seguiremos la notación introducida en la sección anterior.

Sea $A = \{(x_1,\dots,x_n) \in \mathcal{O}_K^n \mid v(x_i) \geq \alpha_i, \quad i = 1,\dots,n\}$ es decir $A = \pi^{\alpha_1}\mathcal{O}_K \times \cdots \times \pi^{\alpha_n}\mathcal{O}_K$. Como $\mathcal{O}_K^n = A \cup A^c$ tenemos lo siguiente

$$\int_{\mathcal{O}_K^n} |f(x)|_K^s \,|dx| = \int_A |f(x)|_K^s \,|dx| + \int_{A^c} |f(x)|_K^s \,|dx| \tag{3.2}$$

Ahora el cambio de variables

$$\mathcal{O}_K^n \to A$$
$$(x_1,\dots,x_n) \mapsto (\pi^{\alpha_1}x_1,\dots,\pi^{\alpha_n}x_n)$$

produce

$$\int_A |f(x)|_K^s \,|dx| = q^{-|\alpha|}t^d \int_{\mathcal{O}_K^n} |f(x)|_K^s \,|dx| \tag{3.3}$$

con lo cual 3.2 se convierte en

$$\int_{\mathcal{O}_K^n} |f(x)|_K^s \,|dx| = \frac{1}{1-q^{-|\alpha|}t^d} \int_{A^c} |f(x)|_K^s \,|dx| \tag{3.4}$$

y, en consecuencia, es suficiente calcular la integral sobre A^c.

Para este fin introducimos una familia $\mathcal{L}$ de conjuntos definidos como sigue; para todo B subconjunto de $\{1, \ldots, n\}$ y cada $a = (a_1, \ldots, a_n) \in \mathbb{N}^n$, tal que $0 \leq a_i < \alpha_i$ para todo $i \in B$, sea

$$D(B, a) = \begin{cases} \{(x_1, \ldots, x_n) \in A^c \mid \upsilon(x_i) = a_i \text{ para todo } i \in B\} & \text{si } B \neq \emptyset \\ \emptyset & \text{si } B = \emptyset. \end{cases} \tag{3.5}$$

Como el lector podrá comprobar fácilmente esta familia es cerrada bajo intersecciones y su unión es A^c, aunque la unión no es disyunta. Pero recordemos que

$$\int_{\bigcup_{i=1}^{n} D_i} |f(x)|_K^s \, |dx| = \sum_{i=1}^{n} \int_{D_i} |f(x)|_K^s \, |dx| - \sum_{1 \leq i \leq j \leq n}^{n} \int_{D_i \cap D_j} |f(x)|_K^s \, |dx| + \cdots + (-1)^n \int_{\bigcap_{i=1}^{n} D_i} |f(x)|_K^s \, |dx|;$$

luego si denotamos por J el conjunto de índices $\{(B, a)\}$ y por $\mathcal{P}(J)_i$ la familia de subconjuntos de J con i elementos, tenemos

$$\int_{A^c} |f(x)|_K^s \, |dx| = \sum_{i=1}^{\mathrm{Card}(J)} (-1)^{i-1} \sum_{T \in \mathcal{P}(J)_i} \int_{D(T)} |f(x)|_K^s \, |dx|, \tag{3.6}$$

donde $D(T) = \bigcap_{(B,a) \in T} D(B, a)$. Como la familia $\mathcal{L}$ es cerrada bajo intersecciones, es suficiente probar que cualquier integral del tipo

$$\int_{D(B,a)} |f(x)|_K^s \, |dx|, \qquad B \neq \emptyset, \tag{3.7}$$

es una función racional de la forma $\frac{L(t, D(B,a))}{1 - q^{-1}t}$. Para esto hagamos el siguiente cambio de variables en (3.7);

$$D'(B, a) \overset{\psi_{(B,a)}(y)}{\rightarrow} D(B, a)$$

$$(y_1, \ldots, y_n) \mapsto (x_1, \ldots, x_n),$$

donde

$$x_i = \begin{cases} \pi^{a_i} y_i & \text{si } i \in B \\ y_i & \text{si } i \notin B \end{cases}$$

y $D'(B, a) = \prod_{i=1}^{n} R_i$, con $R_i = \mathcal{O}_K$ si $i \notin B$ y $R_i = \mathcal{O}_K^{\times}$ si $i \in B$

Con lo anterior obtenemos

$$\int_{D(B,a)} |f(x)|_K^s \, |dx| = q^{-d_{(B,a)}} t^{e_{D(B,a)}} \int_{D'(B,a)} |f_B(x)|_K^s \, |dx| \tag{3.8}$$

donde $f_B(x) = \pi^{-e_{D(B,a)}} f(\psi_{(B,a)}(x))$ y $e_{D(B,a)}$ es el mínimo orden de π en los coeficientes de $f(\psi_{(B,a)}(x))$.

De otro lado $\psi_{(B,a)}$ define un K-isomorfismo de K^n; de modo que el conjunto de puntos K-singulares de $V_f(K)$ se aplica biyectivamente en el conjunto de puntos K-singulares de $V_{f_B}(K)$, y este tipo de integrales son racionales por el lema 3.3.

Capítulo 4

Cálculo de la función zeta local de Igusa para algunos polinomios particulares

En este capítulo ilustraremos el uso de la Fórmula de la Fase Estacionaria de Igusa con algunos polinomios, seguiremos la notación de Igusa

$$\begin{aligned} (a,b) &= 1 - q^{-a}t^{b} & \qquad (a) &= (a,0) \\ (a,b)_{+} &= 1 + q^{-a}t^{b} & \qquad (a)_{+} &= (a,0)_{+} \end{aligned}$$

4.1. Singularidades de Du Val-Klein

Siguiendo la recomendación que nos hiciera el profesor W.A. Zúñiga-Galindo calcularemos las funciones zeta locales de Igusa para las singularidades de Du Val-Klein.

- $E_6 = x^4 + y^3 + z^2$
- $E_7 = x^3y + y^3 + z^2$
- $E_8 = x^5 + y^3 + z^2$
- $A_r = x^{r+1} - yz$
- $D_r = x^{r-1} - xy^2 + z^2$

La notación es la de S.-S Roan en [R]; el método consiste en aplicar la Fórmula de la Fase Estacionaria de Igusa (**FFE**) hasta obtener una integral singular repetida.

4.1.1. Cálculo para E_6

Teorema 4.1. Sea K un cuerpo local no arquimediano, si la caracterizaba de $\mathcal{O}_K/\pi\mathcal{O}_K$ es diferente de 2 y 3, entonces la función zeta local de Igusa asociada a $E_6 = x^4 + y^3 + z^2$ viene dada por

$$\begin{aligned} Z(t) = & \frac{(1-q^{-1})(\sigma_0 t + \sigma_3 q^{-5}t^5 + \sigma_4 q^{-7}t^7 + \sigma_5 q^{-9}t^9)}{(1-q^{-1}t)(1-q^{-13}t^{12})} \\ + & \frac{(\nu_0 + \nu_3 q^{-5}t^4 + \nu_4 q^{-7}t^6 + \nu_5 q^{-9}t^8)}{1-q^{-13}t^{12}} \\ + & \frac{(1-q^{-1})(q^{-3}t^2 + q^{-4}t^3 + q^{-11}t^9 + q^{-12}t^{10})}{1-q^{-13}t^{12}} \end{aligned}$$

Demostración. **Primera aplicación de FFS**
Aquí tenemos $f_0 = x^4 + y^3 + z^2$, de modo que $\overline{f_0} = x^4 + y^3 + z^2$, $Sing(\overline{f}_0) = \{(0,0,0)\}$, y

$$\nu_0 = q^{-3}Card\{(\overline{x},\overline{y},\overline{z}) \in \mathbb{F}_q^3 \mid \overline{f}_0(\overline{x},\overline{y},\overline{z}) \neq 0\}$$

$$\sigma_0 = q^{-3}Card\{(\overline{x},\overline{y},\overline{z}) \in \mathbb{F}_q^3 \mid \overline{f}_0(\overline{x},\overline{y},\overline{z}) = 0 \text{ y es no singular}\};$$

en consecuencia,

$$\int_{\mathcal{O}_K^3} \left|x^4 + y^3 + z^2\right|^s |dx\,dy\,dz| = \nu_0 + \sigma_0\frac{(1-q^{-1})q^{-s}}{(1-q^{-1}q^{-s})} + \int_{S_0} \left|x^4 + y^3 + z^2\right|^s |dx\,dy\,dz|,$$

con $S_0 = \mathcal{P}_K^3$. Haciendo el cambio de variable $(x,y,z) \mapsto (\pi x, \pi y, \pi z)$ tenemos que

$$\int_{S_0} \left|x^4 + y^3 + z^2\right|^s |dx\,dy\,dz| = q^{-3}q^{-2s}\int_{\mathcal{O}_K^3} \left|\pi^2 x^4 + \pi y^3 + z^2\right|^s |dx\,dy\,dz|,$$

por lo tanto, tenemos

$$\begin{aligned} & \int_{\mathcal{O}_K^3} \left|x^4 + y^3 + z^2\right|^s |dx\,dy\,dz| = \\ & \qquad \nu_0 + \sigma_0\frac{(1-q^{-1})q^{-s}}{(1-q^{-1}q^{-s})} + q^{-3}q^{-2s}\int_{\mathcal{O}_K^3} \left|\pi^2 x^4 + \pi y^3 + z^2\right|^s |dx\,dy\,dz| \end{aligned}$$

Segunda Aplicación de FFS
Aquí tenemos $f_1 = \pi^2 x^4 + \pi y^3 + z^2$ luego $\overline{f_1} = z^2$, $Sing(\overline{f}_1) = \mathbb{F}_q \times \mathbb{F}_q \times \{0\}$, y en consecuencia $\nu_1 = q^{-3}q^2(q-1) = 1-q^{-1}$, $\sigma_1 = 0$ y $S_1 = \mathcal{O}_K \times \mathcal{O}_K \times \mathcal{P}_K$; así

$$\int_{\mathcal{O}_K^3} \left|\pi^2 x^4 + \pi y^3 + z^2\right|^s |dx\,dy\,dz| = 1-q^{-1} + \int_{S_1} \left|\pi^2 x^4 + \pi y^3 + z^2\right|^s |dx\,dy\,dz|$$

Haciendo el cambio de variable $(x,y,z)\mapsto(x,y,\pi z)$ tenemos que

$$\int_{S_1}\left|\pi^2x^4+\pi y^3+z^2\right|^s\,|dx\,dy\,dz| = q^{-1}q^{-s}\int_{\mathcal{O}_K^3}\left|\pi x^4+y^3+\pi z^2\right|^s\,|dx\,dy\,dz|;$$

por lo tanto, tenemos

$$\int_{\mathcal{O}_K^3}\left|\pi^2x^4+\pi y^3+z^2\right|^s\,|dx\,dy\,dz| =$$

$$1-q^{-1}\;+\;q^{-1}q^{-s}\int_{\mathcal{O}_K^3}\left|\pi x^4+y^3+\pi z^2\right|^s\,|dx\,dy\,dz|$$

Tercera Aplicación de FFS

Aquí tenemos $f_2=\pi x^4+y^3+\pi z^2$ luego $\overline{f_2}=y^3$, $Sing(\overline{f}_2)=\mathbb{F}_q\times\{0\}\times\mathbb{F}_q$,por lo tanto, en este caso $\nu_2=q^{-3}q^2(q-1)=1-q^{-1}$, $\sigma_2=0$ y $S_2=\mathcal{O}_K\times\mathcal{P}_K\times\mathcal{O}_K$; así

$$\int_{\mathcal{O}_K^3}\left|\pi x^4+y^3+\pi z^2\right|^s\,|dx\,dy\,dz| = 1-q^{-1}+\int_{S_2}\left|\pi x^4+y^3+\pi z^2\right|^s\,|dx\,dy\,dz|,$$

Haciendo el cambio de variable $(x,y,z)\mapsto(x,\pi y,z)$ tenemos que

$$\int_{S_2}\left|\pi x^4+y^3+\pi z^2\right|^s\,|dx\,dy\,dz| = q^{-1}q^{-s}\int_{\mathcal{O}_K^3}\left|x^4+\pi^2y^3+z^2\right|^s\,|dx\,dy\,dz|;$$

luego,

$$\int_{\mathcal{O}_K^3}\left|\pi x^4+y^3+\pi z^2\right|^s\,|dx\,dy\,dz| =$$

$$1-q^{-1}\;+\;q^{-1}q^{-s}\int_{\mathcal{O}_K^3}\left|x^4+\pi^2y^3+z^2\right|^s\,|dx\,dy\,dz|$$

Cuarta Aplicación de FFS

Aquí tenemos $f_3=x^4+\pi^2y^3+z^2$ luego $\overline{f_3}=x^4+z^2$, $Sing(\overline{f}_3)=\{0\}\times\mathbb{F}_q\times\{0\}$ luego en este caso

$$\nu_3=q^{-3}Card\{(\overline{x},\overline{y},\overline{z})\in\mathbb{F}_q^3\mid\overline{f}_3(\overline{x},\overline{y},\overline{z})\neq0\}$$

$$\sigma_3=q^{-3}Card\{(\overline{x},\overline{y},\overline{z})\in\mathbb{F}_q^3\mid\overline{f}_3(\overline{x},\overline{y},\overline{z})=0\text{ y es no singular}\};$$

y por lo tanto,

$$\int_{\mathcal{O}_K^3}\left|x^4+\pi^2y^3+z^2\right|^s\,|dx\,dy\,dz| = \nu_3\;+\;\sigma_3\frac{(1-q^{-1})q^{-s}}{(1-q^{-1}q^{-s})}$$

$$+\int_{S_3}\left|x^4+\pi^2y^3+z^2\right|^s\,|dx\,dy\,dz|,$$

con $S_3 = \mathcal{P}_K \times \mathcal{O}_K \times \mathcal{P}_K$, haciendo el cambio de variable $(x, y, z) \mapsto (\pi x, y, \pi z)$ tenemos que

$$\int_{S_3} \left| x^4 + \pi^2 y^3 + z^2 \right|^s \, |dx\, dy\, dz| = q^{-2} q^{-2s} \int_{\mathcal{O}_K^3} \left| \pi^2 x^4 + y^3 + z^2 \right|^s \, |dx\, dy\, dz|,$$

por lo tanto tenemos

$$\int_{\mathcal{O}_K^3} \left| x^4 + \pi^2 y^3 + z^2 \right|^s \, |dx\, dy\, dz| =$$

$$\nu_3 \;+\; \sigma_3 \frac{(1-q^{-1})q^{-s}}{(1-q^{-1}q^{-s})} \;+\; q^{-2} q^{-2s} \int_{\mathcal{O}_K^3} \left| \pi^2 x^4 + y^3 + z^2 \right|^s \, dx\, dy\, dz$$

Quinta Aplicación de FFS

Aquí tenemos $f_4 = \pi^2 x^4 + y^3 + z^2$ luego $\overline{f_4} = y^3 + z^2$, $Sing(\overline{f}_4) = \mathbb{F}_q \times \{0\} \times \{0\}$, en consecuencia

$$\nu_4 = q^{-3} Card\{(\overline{x}, \overline{y}, \overline{z}) \in \mathbb{F}_q^3 \mid \overline{f}_4(\overline{x}, \overline{y}, \overline{z}) \neq 0\}$$

$$\sigma_4 = q^{-3} Card\{(\overline{x}, \overline{y}, \overline{z}) \in \mathbb{F}_q^3 \mid \overline{f}_4(\overline{x}, \overline{y}, \overline{z}) = 0 \text{ y es no singular}\};$$

luego

$$\int_{\mathcal{O}_K^3} \left| \pi^2 x^4 + y^3 + z^2 \right|^s \, |dx\, dy\, dz| = \nu_4 \;+\; \sigma_4 \frac{(1-q^{-1})q^{-s}}{(1-q^{-1}q^{-s})} + \int_{S_4} \left| \pi^2 x^4 + y^3 + z^2 \right|^s \, |dx\, dy\, dz|,$$

con $S_4 = \mathcal{O}_K \times \mathcal{P}_K \times \mathcal{P}_K$, haciendo el cambio de variable $(x, y, z) \mapsto (x, \pi y, \pi z)$ tenemos que

$$\int_{S_4} \left| \pi^2 x^4 + y^3 + z^2 \right|^s \, |dx\, dy\, dz| = q^{-2} q^{-2s} \int_{\mathcal{O}_K^3} \left| x^4 + \pi y^3 + z^2 \right|^s \, |dx\, dy\, dz|,$$

con lo cual,

$$\int_{\mathcal{O}_K^3} \left| \pi^2 x^4 + y^3 + z^2 \right|^s \, |dx\, dy\, dz| =$$

$$\nu_4 \;+\; \sigma_4 \frac{(1-q^{-1})q^{-s}}{(1-q^{-1}q^{-s})} \;+\; q^{-2} q^{-2s} \int_{\mathcal{O}_K^3} \left| x^4 + \pi y^3 + z^2 \right|^s \, |dx\, dy\, dz|$$

Sexta Aplicación de FFS

Aquí tenemos $f_5 = x^4 + \pi y^3 + z^2$ luego $\overline{f_5} = x^4 + z^2$, $Sing(\overline{f}_5) = \{0\}\, \mathbb{F}_q \times \{0\}$ luego en este caso

$$\nu_5 = q^{-3} Card\{(\overline{x}, \overline{y}, \overline{z}) \in \mathbb{F}_q^3 \mid \overline{f}_5(\overline{x}, \overline{y}, \overline{z}) \neq 0\}$$

$$\sigma_5 = q^{-3}Card\{(\overline{x},\overline{y},\overline{z}) \in \mathbb{F}_q^3 \mid \overline{f}_5(\overline{x},\overline{y},\overline{z}) = 0 \text{ y es no singular}\};$$

luego

$$\int_{\mathcal{O}_K^3} \left|x^4+\pi y^3+z^2\right|^s |dx\,dy\,dz| = \nu_5 \,+\, \sigma_5\frac{(1-q^{-1})q^{-s}}{(1-q^{-1}q^{-s})} + \int_{S_5} \left|x^4+\pi y^3+z^2\right|^s |dx\,dy\,dz|;$$

con $S_5 = \mathcal{P}_K\times\mathcal{O}_K\times\mathcal{P}_K$, haciendo el cambio de variable $(x,y,z)\mapsto(\pi x, y, \pi z)$ tenemos que

$$\int_{S_5} \left|x^4+\pi y^3+z^2\right|^s |dx\,dy\,dz| = q^{-2}q^{-s}\int_{\mathcal{O}_K^3} \left|\pi^3x^4+y^3+\pi z^2\right|^s |dx\,dy\,dz|,$$

con lo que,

$$\int_{\mathcal{O}_K^3} \left|x^4+\pi y^3+z^2\right|^s |dx\,dy\,dz| = \nu_5 \,+\, \sigma_5\frac{(1-q^{-1})q^{-s}}{(1-q^{-1}q^{-s})} \,+\, q^{-2}q^{-s}\int_{\mathcal{O}_K^3} \left|\pi^3x^4+y^3+\pi z^2\right|^s |dx\,dy\,dz|$$

Séptima Aplicación de FFS
Aquí tenemos $f_6 = \pi^3x^4+y^3+\pi z^2$ luego $\overline{f_6} = y^3$, $Sing(\overline{f}_6) = \mathbb{F}_q\times\{0\}\times\mathbb{F}_q$ luego en este caso $\nu_6 = 1-q^{-1}$, $\sigma_6 = 0$ y $S_6 = \mathcal{O}_K\times\mathcal{P}_K\times\mathcal{O}_K$ así

$$\int_{\mathcal{O}_K^3} \left|\pi^3x^4+y^3+\pi z^2\right|^s |dx\,dy\,dz| = 1-q^{-1} + \int_{S_6} \left|\pi^3x^4+y^3+\pi z^2\right|^s |dx\,dy\,dz|;$$

Haciendo el cambio de variable $(x,y,z)\mapsto(x,\pi y,z)$ tenemos que

$$\int_{S_6} \left|\pi^3x^4+y^3+\pi z^2\right|^s |dx\,dy\,dz| = q^{-1}q^{-s}\int_{\mathcal{O}_K^3} \left|\pi^2x^4+\pi^2y^3+z^2\right|^s |dx\,dy\,dz|,$$

por lo tanto tenemos

$$\int_{\mathcal{O}_K^3} \left|\pi^3x^4+y^3+\pi z^2\right|^s |dx\,dy\,dz| = 1-q^{-1} \,+\, q^{-1}q^{-s}\int_{\mathcal{O}_K^3} \left|\pi^2x^4+\pi^2y^3+z^2\right|^s |dx\,dy\,dz|$$

Octava Aplicación de FFS
Aquí tenemos $f_7 = \pi^2x^4+\pi^2y^3+z^2$ luego $\overline{f_7} = z^2$, $Sing(\overline{f}_7) = \mathbb{F}_q\times\mathbb{F}_q\times\{0\}$, en consecuencia $\nu_7 = 1-q^{-1}$, $\sigma_7 = 0$ y $S_7 = \mathcal{O}_K\times\mathcal{O}_K\times\mathcal{P}_K$ así

$$\int_{\mathcal{O}_K^3} \left|\pi^2x^4+\pi^2y^3+z^2\right|^s |dx\,dy\,dz| = 1-q^{-1} + \int_{S_7} \left|\pi^2x^4+\pi^2y^3+z^2\right|^s |dx\,dy\,dz|;$$

Haciendo el cambio de variable $(x,y,z) \mapsto (x,y,\pi z)$ tenemos que

$$\int_{S_7} \left|\pi^2 x^4 + \pi^2 y^3 + z^2\right|^s \, |dx\,dy\,dz| = q^{-1}q^{-2s} \int_{\mathcal{O}_K^3} \left|x^4 + y^3 + z^2\right|^s \, |dx\,dy\,dz|,$$

por lo tanto tenemos

$$\int_{\mathcal{O}_K^3} \left|\pi^2 x^4 + \pi^2 y^3 + z^2\right|^s \, |dx\,dy\,dz| =$$

$$1 - q^{-1} \, + \, q^{-1}q^{-2s} \int_{\mathcal{O}_K^3} \left|x^4 + y^3 + z^2\right|^s \, |dx\,dy\,dz|$$

Resultado final

Sea $q^{-s} = t$ y $Z(t) = \int_{\mathcal{O}_K^3} |x^4 + y^3 + z^2|^s \, |dx\,dy\,dz|$ entonces reemplazando los resultados intermedios que hemos obtenido tenemos que

$$\begin{aligned} Z(t) = & \frac{(1-q^{-1})(\sigma_0 t + \sigma_3 q^{-5}t^5 + \sigma_4 q^{-7}t^7 + \sigma_5 q^{-9}t^9)}{(1-q^{-1}t)(1-q^{-13}t^{12})} \\ + & \frac{(\nu_0 + \nu_3 q^{-5}t^4 + \nu_4 q^{-7}t^6 + \nu_5 q^{-9}t^8)}{1-q^{-13}t^{12}} \\ + & \frac{(1-q^{-1})(q^{-3}t^2 + q^{-4}t^3 + q^{-11}t^9 + q^{-12}t^{10})}{1-q^{-13}t^{12}} \end{aligned}$$

□

4.1.2. Cálculo para E_7

Teorema 4.2. Sea K un cuerpo local no arquimediano, si la característica de $\mathcal{O}_K/\pi\mathcal{O}_K$ es diferente de 2 y 3, entonces la función zeta local de Igusa asociada a $E_7 = x^3y + y^3 + z^2$ viene dada por

$$\int_{\mathcal{O}_K^3} |x^3y + y^3 + z^2|_K^s \, |dx\,dy\,dz| =$$

$$\frac{(1)t\big(\sigma_0 + \sigma_5 q^{-7}t^6(6,6)_+ + \sigma_7 q^{-10}t^9 + \sigma_{10}q^{-15}t^14 + (1)q^{-7}t^5\big)}{(1,1)(19,18)}$$

$$+\frac{\nu_0 + \nu_5 q^{-7}t^6(6,6)_+ \nu_7 q^{-10}t^9 + \nu_{10}q^{-15}t^{14}}{(19,18)}$$

$$+\frac{(1)\big(q^{-3}t^2(1,1)_+ + q^{-5}t^4(4,4)_+ + q^{-12}t^{10}(5,5)_+ + (1)q^{-6}t^5 + q^{-18}t^{16}\big)}{(19,18)}$$

Demostración. **Primera aplicación de FFE**
Sea $f_0 = x^3y + y^3 + z^2$, ν_0 y σ_0 con su significado usual para f_0, se puede ver que el único punto singular de la reducción de f_0 son $(0,0,0)$, luego la primera aplicación de **FFE** produce

$$\int_{\mathcal{O}_K^3} |x^3y + y^3 + z^2|_K^s \, |dx\, dy\, dz| =$$
$$\nu_0 + \sigma_0 \frac{(1)}{(1,1)} t + q^{-3}t^2 \int_{\mathcal{O}_K^3} |\pi^2x^3y + \pi y^3 + z^2|_K^s \, |dx\, dy\, dz|;$$

Segunda aplicación de FFE
En este caso $f_1 = \pi^2x^3y + \pi y^3 + z^2$, por lo tanto $\overline{f_1} = z^2$, luego $\nu_1 = q^{-3}q^2(q-1) = 1 - q^{-1}$, y $\sigma_1 = 0$, y como el conjunto de puntos singulares de $\overline{f_1}$ es $\mathbb{F}_q \times \mathbb{F}_q \times \{0\}$ tenemos que

$$\int_{\mathcal{O}_K^3} |\pi^2x^3y + \pi y^3 + z^2|_K^s \, |dx\, dy\, dz| =$$
$$(1) + \int_{\mathcal{O}_K \times \mathcal{O}_K \times \pi\mathcal{O}_K} |\pi^2x^3y + \pi y^3 + z^2|_K^s \, |dx\, dy\, dz|$$
$$= (1) + q^{-1}t \int_{\mathcal{O}_K^3} |\pi x^3y + y^3 + \pi z^2|_K^s \, |dx\, dy\, dz|;$$

Tercera aplicación de FFE
En este caso $f_2 = \pi x^3y + y^3 + \pi z^2$, por lo tanto $\overline{f_2} = y^3$, luego $\nu_2 = q^{-3}q^2(q-1) = 1 - q^{-1}$, y $\sigma_2 = 0$, y como el conjunto de puntos singulares de $\overline{f_2}$ es $\mathbb{F}_q \times \{0\} \times \mathbb{F}_q$ tenemos que

$$\int_{\mathcal{O}_K^3} |\pi x^3y + y^3 + \pi z^2|_K^s \, |dx\, dy\, dz| =$$
$$(1) + \int_{\mathcal{O}_K \times \pi\mathcal{O}_K \times \mathcal{O}_K} |\pi x^3y + y^3 + \pi z^2|_K^s \, |dx\, dy\, dz|$$
$$= (1) + q^{-1}t \int_{\mathcal{O}_K^3} |\pi x^3y + \pi^2 y^3 + z^2|_K^s \, |dx\, dy\, dz|;$$

Quarta aplicación de FFE
En este caso $f_3 = \pi x^3y + \pi^2y^3 + z^2$, por lo tanto $\overline{f_3} = z^2$, en consecuencia $\nu_3 = q^{-3}q^2(q-1) = 1 - q^{-1}$, y $\sigma_3 = 0$, y como el conjunto de puntos singulares

de $\overline{f_3}$ es $\mathbb{F}_q \times \mathbb{F}_q \times \{0\}$ tenemos que

$$\int_{\mathcal{O}_K^3} |\pi x^3 y + \pi^2 y^3 + z^2|_K^s \, |dx\, dy\, dz| =$$

$$(1) + \int_{\mathcal{O}_K \times \mathcal{O}_K \times \pi\mathcal{O}_K} |\pi x^3 y + \pi^2 y^3 + z^2|_K^s \, |dx\, dy\, dz|$$

$$= (1) + q^{-1} t \int_{\mathcal{O}_K^3} |x^3 y + \pi y^3 + \pi z^2|_K^s \, |dx\, dy\, dz|;$$

Quinta aplicación de FFE

En este caso $f_4 = x^3 y + \pi y^3 + \pi z^2$, por lo tanto $\overline{f_4} = x^3 y$, por lo tanto $\nu_4 = q^{-3} q (q-1)^2 = (1 - q^{-1})^2$, y $\sigma_4 = q^{-3} q (q-1) = q^{-1}(1 - q^{-1})$, y como el conjunto de puntos singulares de $\overline{f_4}$ es $\{0\} \times \mathbb{F}_q \times \{0\}$ tenemos que

$$\int_{\mathcal{O}_K^3} |x^3 y + \pi y^3 + \pi z^2|_K^s \, |dx\, dy\, dz| =$$

$$(1)^2 + q^{-1}(1) \frac{(1)}{(1,1)} t + \int_{\pi\mathcal{O}_K \times \mathcal{O}_K \times \pi\mathcal{O}_K} |x^3 y + \pi y^3 + \pi z^2|_K^s \, |dx\, dy\, dz|$$

$$= (1)^2 + q^{-1}(1) \frac{(1)}{(1,1)} t + q^{-1} t \int_{\mathcal{O}_K^3} |\pi^2 x^3 y + y^3 + z^2|_K^s \, |dx\, dy\, dz|;$$

Sexta aplicación de FFE

En este caso $f_5 = \pi^2 x^3 y + y^3 + z^2$, por lo tanto $\overline{f_5} = y^3 + z^2$, y como el conjunto de puntos singulares de $\overline{f_5}$ es $\mathbb{F}_q \times \{0\} \times \{0\}$ tenemos que

$$\int_{\mathcal{O}_K^3} |\pi^2 x^3 y + y^3 + z^2|_K^s \, |dx\, dy\, dz| =$$

$$\nu_5 + \sigma_5 \frac{(1)}{(1,1)} t + \int_{\mathcal{O}_K \times \pi\mathcal{O}_K \times \pi\mathcal{O}_K} |\pi^2 x^3 y + y^3 + z^2|_K^s \, |dx\, dy\, dz|$$

$$= \nu_5 + \sigma_5 \frac{(1)}{(1,1)} t + q^{-2} t^2 \int_{\mathcal{O}_K^3} |\pi x^3 y + \pi y^3 + z^2|_K^s \, |dx\, dy\, dz|;$$

Séptima aplicación de FFE

En este caso $f_6 = \pi x^3 y + \pi y^3 + z^2$, por lo tanto $\overline{f_6} = z^2$, y en consecuencia $\nu_6 = q^{-3} q^2 (q-1) = 1 - q^{-1}$, y $\sigma_6 = 0$, y como el conjunto de puntos singulares de $\overline{f_6}$ es $\mathbb{F}_q \times \mathbb{F}_q \times \{0\}$ tenemos que

$$\begin{aligned}\int_{\mathcal{O}_K^3} &|\pi x^3 y + \pi y^3 + z^2|_K^s \, |dx\, dy\, dz| = \\ &(1) + \int_{\mathcal{O}_K \times \mathcal{O}_K \times \pi\mathcal{O}_K} |\pi x^3 y + \pi y^3 + z^2|_K^s \, |dx\, dy\, dz| \\ &= (1) + q^{-1} t \int_{\mathcal{O}_K^3} |x^3 y + y^3 + \pi z^2|_K^s \, |dx\, dy\, dz|;\end{aligned}$$

Octava aplicación de FFE
En este caso $f_7 = x^3 y + y^3 + \pi z^2$, por lo tanto $\overline{f_7} = x^3 y + y^3$, y como el conjunto de puntos singulares de $\overline{f_7}$ es $\{0\} \times \{0\} \times \mathbb{F}_q$ tenemos que

$$\begin{aligned}\int_{\mathcal{O}_K^3} &|x^3 y + y^3 + \pi z^2|_K^s \, |dx\, dy\, dz| = \\ &\nu_7 + \sigma_7 \frac{(1)}{(1,1)} t + \int_{\pi\mathcal{O}_K \times \pi\mathcal{O}_K \times \mathcal{O}_K} |x^3 y + y^3 + \pi z^2|_K^s \, |dx\, dy\, dz| \\ &= \nu_7 + \sigma_7 \frac{(1)}{(1,1)} t + q^{-2} t \int_{\mathcal{O}_K^3} |\pi^3 x^3 y + \pi^2 y^3 + z^2|_K^s \, |dx\, dy\, dz|\end{aligned}$$

Novena aplicación de FFE
En este caso $f_8 = \pi^3 x^3 y + \pi^2 y^3 + z^2$, por lo tanto $\overline{f_8} = z^2$, luego en este caso $\nu_8 = q^{-3} q^2 (q-1) = 1 - q^{-1}$, y $\sigma_8 = 0$, y como el conjunto de puntos singulares de $\overline{f_8}$ es $\mathbb{F}_q \times \mathbb{F}_q \times \{0\}$ tenemos que

$$\begin{aligned}\int_{\mathcal{O}_K^3} &|\pi^3 x^3 y + \pi^2 y^3 + z^2|_K^s \, |dx\, dy\, dz| = \\ &(1) + \int_{\mathcal{O}_K \times \mathcal{O}_K \times \pi\mathcal{O}_K} |\pi^3 x^3 y + \pi^2 y^3 + z^2|_K^s \, |dx\, dy\, dz| \\ &= (1) + q^{-1} t^2 \int_{\mathcal{O}_K^3} |\pi x^3 y + y^3 + z^2|_K^s \, |dx\, dy\, dz|;\end{aligned}$$

Décima aplicación de FFE
En este caso $f_9 = \pi x^3 y + y^3 + z^2$, por lo tanto $\overline{f_9} = y^3 + z^2 = \overline{f_5}$, y como el

conjunto de puntos singulares de $\overline{f_9}$ es $\mathbb{F}_q \times \{0\} \times \{0\}$ tenemos que

$$\int_{\mathcal{O}_K^3} |\pi x^3 y + y^3 + z^2|_K^s \, |dx\,dy\,dz| =$$

$$\nu_5 + \sigma_5 \frac{(1)}{(1,1)} t + \int_{\mathcal{O}_K \times \pi\mathcal{O}_K \times \pi\mathcal{O}_K} |\pi x^3 y + y^3 + z^2|_K^s \, |dx\,dy\,dz|$$

$$= \nu_5 + \sigma_5 \frac{(1)}{(1,1)} t + q^{-2} t^2 \int_{\mathcal{O}_K^3} |x^3 y + \pi y^3 + z^2|_K^s \, |dx\,dy\,dz|;$$

Decimoprimera aplicación de FFE
En este caso $f_{10} = x^3 y + \pi y^3 + z^2$, por lo tanto $\overline{f_{10}} = x^3 y + z^2$, y como el conjunto de puntos singulares de $\overline{f_{10}}$ es $\{0\} \times \mathbb{F}_q \times \{0\}$ tenemos que

$$\int_{\mathcal{O}_K^3} |x^3 y + \pi y^3 + z^2|_K^s \, |dx\,dy\,dz| =$$

$$\nu_{10} + \sigma_{10} \frac{(1)}{(1,1)} t + \int_{\pi\mathcal{O}_K \times \mathcal{O}_K \times \pi\mathcal{O}_K} |x^3 y + \pi y^3 + z^2|_K^s \, |dx\,dy\,dz|$$

$$= \nu_{10} + \sigma_{10} \frac{(1)}{(1,1)} t + q^{-2} t \int_{\mathcal{O}_K^3} |\pi^2 x^3 y + y^3 + \pi z^2|_K^s \, |dx\,dy\,dz|;$$

Decimosegunda aplicación de FFE
En este caso $f_{11} = \pi^2 x^3 y + y^3 + \pi z^2$, por lo tanto $\overline{f_{11}} = y^3$, luego en este caso $\nu_{11} = q^{-3} q^2 (q-1) = 1 - q^{-1}$, y $\sigma_{11} = 0$, y como el conjunto de puntos singulares de $\overline{f_{11}}$ es $\mathbb{F}_q \times \{0\} \times \mathbb{F}_q$ tenemos que

$$\int_{\mathcal{O}_K^3} |\pi^2 x^3 y + y^3 + \pi z^2|_K^s \, |dx\,dy\,dz| =$$

$$(1) + \int_{\mathcal{O}_K \times \pi\mathcal{O}_K \times \mathcal{O}_K} |\pi^2 x^3 y + y^3 + \pi z^2|_K^s \, |dx\,dy\,dz|$$

$$= (1) + q^{-1} t \int_{\mathcal{O}_K^3} |\pi^2 x^3 y + \pi^2 y^3 + z^2|_K^s \, |dx\,dy\,dz|;$$

Decimotercera aplicación de FFE
en este caso $f_{12} = \pi^2 x^3 y + \pi^2 y^3 + z^2$, por lo tanto $\overline{f_{12}} = z^2$, luego en este caso $\nu_{12} = q^{-3} q^2 (q-1) = 1 - q^{-1}$, y $\sigma_{12} = 0$, y como el conjunto de puntos

singulares de $\overline{f_{12}}$ es $\mathbb{F}_q \times \mathbb{F}_q \times \{0\}$ tenemos que

$$\begin{aligned}\int_{\mathcal{O}_K^3} &|\pi^2 x^3 y + \pi^2 y^3 + z^2|_K^s \, |dx\, dy\, dz| = \\ &(1) + \int_{\mathcal{O}_K \times \mathcal{O}_K \times \pi\mathcal{O}_K} |\pi^2 x^3 y + \pi^2 y^3 + z^2|_K^s \, |dx\, dy\, dz| \\ &= (1) + q^{-1}t^2 \int_{\mathcal{O}_K^3} |x^3 y + y^3 + z^2|_K^s \, |dx\, dy\, dz|;\end{aligned}$$

Resultado Final

Reuniendo todo esto tenemos que

$$\int_{\mathcal{O}_K^3} |x^3 y + y^3 + z^2|_K^s \, |dx\, dy\, dz| =$$

$$\frac{(1)t\big(\sigma_0 + \sigma_5 q^{-7}t^6(6,6)_+ + \sigma_7 q^{-10}t^9 + \sigma_{10} q^{-15}t^14 + (1)q^{-7}t^5\big)}{(1,1)(19,18)}$$

$$+\frac{\nu_0 + \nu_5 q^{-7}t^6(6,6)_+ \nu_7 q^{-10}t^9 + \nu_{10} q^{-15}t^{14}}{(19,18)}$$

$$+\frac{(1)\big(q^{-3}t^2(1,1)_+ + q^{-5}t^4(4,4)_+ + q^{-12}t^{10}(5,5)_+ + (1)q^{-6}t^5 + q^{-18}t^{16}\big)}{(19,18)}$$

$\square$

4.1.3. Cálculo para E_8

Teorema 4.3. Sea K un cuerpo local no arquimediano, si la característica de $\mathcal{O}_K/\pi\mathcal{O}_K$ es diferente de 2, 3 y 5, entonces la función zeta local de Igusa asociada a $E_8 = x^5 + y^3 + z^2$ es

$$\int_{\mathcal{O}_K^3} |x^5 + y^3 + z^2|_K^s \, |dx\, dy\, dz| =$$

$$\frac{\nu_0(1,1) + \sigma_0(1)t}{(1,1)(31,30)}$$

$$+\frac{(1)\big(q^{-3}t^2 \sum_{i=0}^3 (q^{-1}t)^i + q^{-9}t^8(1,1)_+ + q^{-15}t^{14}(3,2)_+ + q^{-23}t^{21}(1,1)_+\big)}{(31,30)}$$

$$+\frac{\big(q^{-27}t^{25} \sum_{i=0}^3 (q^{-1}t)^i\big)}{(31,30)}$$

$$+\frac{\big(\nu_5(1,1) + (1 - q^{-2} - \nu_5)(1)t\big)q^{-8}t^6 \sum_{i=0}^3 (q^{-1}t)^{6i}}{(1,1)(31,30)}$$

$$+\frac{\big(\nu_8(1,1)+(1-q^{-2}-\nu_8)(1)t\big)q^{-12}t^{10}(10,10)_+}{(1,1)(31,30)}$$

$$+\frac{\big(\nu_{11}(1,1)+(1-q^{-2}-\nu_{11})(1)t\big)q^{-17}t^{15}}{(1,1)(31,30)}$$

Demostración. En este caso son necesarias 22 aplicaciones de **FFE**, resumiremos los cálculos como sigue; sea

$$Z(l,m,n)=\int_{\mathcal{O}_K^3}|\pi^l x^5+\pi^m y^3+\pi^n z^2|_K^s\,|dx\,dy\,dz|,$$

donde $0\le l\le 5$, $0\le m\le 3$, $0\le n\le 2$ y al menos uno entre l,m,n es cero, a $Z(0,0,0)$ lo notaremos sencillamente por Z

La primera aplicación de **FFE** produce lo siguiente

$$\int_{\mathcal{O}_K^3}|x^5+y^3+z^2|_K^s\,|dx\,dy\,dz|=\nu_0+\sigma_0\frac{(1)}{(1,1)}t+q^{-3}t^2\int_{\mathcal{O}_K^3}|\pi^3x^5+\pi y^3+z^2|_K^s\,|dx\,dy\,dz|;$$

que lo escribimos como

$$Z=\nu_0+\sigma_0\frac{(1)}{(1,1)}t+q^{-3}t^2Z(3,1,0)$$

donde ν_0 y σ_0 tienen su significado usual para $f_0=x^5+y^3+z^2$. sucesivamente tenemos lo siguiente

$$Z(3,1,0)=\nu_1+\sigma_1\frac{(1)}{(1,1)}t+q^{-1}tZ(2,0,1)$$

donde $f_1=\pi^3x^5+\pi y^3+z^2$

$$Z(2,0,1)=\nu_2+\sigma_2\frac{(1)}{(1,1)}t+q^{-1}tZ(1,2,0)$$

donde $f_2=\pi^2x^5+y^3+\pi z^2$

$$Z(1,2,0)=\nu_3+\sigma_3\frac{(1)}{(1,1)}t+q^{-1}tZ(0,1,1)$$

donde $f_3=\pi x^5+\pi^2y^3+z^2$

$$Z(0,1,1)=\nu_4+\sigma_4\frac{(1)}{(1,1)}t+q^{-2}tZ(4,0,0)$$

donde $f_4=x^5+\pi y^3+\pi z^2$

$$Z(4,0,0)=\nu_5+\sigma_5\frac{(1)}{(1,1)}t+q^{-1}t^2Z(2,1,0)$$

donde $f_5 = \pi^4 x^5 + y^3 + z^2$

$$Z(2,1,0) = \nu_6 + \sigma_6 \frac{(1)}{(1,1)} t + q^{-1} t Z(1,0,1)$$

donde $f_6 = \pi^2 x^5 + \pi y^3 + z^2$

$$Z(1,0,1) = \nu_7 + \sigma_7 \frac{(1)}{(1,1)} t + q^{-2} t Z(0,2,0)$$

donde $f_7 = \pi x^5 + y^3 + \pi z^2$

$$Z(0,2,0) = \nu_8 + \sigma_8 \frac{(1)}{(1,1)} t + q^{-2} t^2 Z(3,0,0)$$

donde $f_8 = x^5 + \pi^2 y^3 + z^2$

$$Z(3,0,0) = \nu_9 + \sigma_9 \frac{(1)}{(1,1)} t + q^{-1} t^2 Z(1,1,0)$$

donde $f_9 = \pi^3 x^5 + y^3 + z^2$

$$Z(1,1,0) = \nu_{10} + \sigma_{10} \frac{(1)}{(1,1)} t + q^{-2} t Z(0,0,1)$$

donde $f_{10} = \pi x^5 + \pi y^3 + z^2$

$$Z(0,0,1) = \nu_{11} + \sigma_{11} \frac{(1)}{(1,1)} t + q^{-1} t Z(4,2,0)$$

donde $f_{11} = x^5 + y^3 + \pi z^2$

$$Z(4,2,0) = \nu_{12} + \sigma_{12} \frac{(1)}{(1,1)} t + q^{-2} t^2 Z(2,0,0)$$

donde $f_{12} = \pi^4 x^5 + \pi^2 y^3 + z^2$

$$Z(2,0,0) = \nu_{13} + \sigma_{13} \frac{(1)}{(1,1)} t + q^{-2} t^2 Z(0,1,0)$$

donde $f_{13} = \pi^2 x^5 + y^3 + z^2$

$$Z(0,1,0) = \nu_{14} + \sigma_{14} \frac{(1)}{(1,1)} t + q^{-1} t Z(4,0,1)$$

donde $f_{14} = x^5 + \pi y^3 + z^2$

$$Z(4,0,1) = \nu_{15} + \sigma_{15} \frac{(1)}{(1,1)} t + q^{-1} t Z(3,2,0)$$

donde $f_{15} = \pi^4 x^5 + y^3 + \pi z^2$

$$Z(3,2,0) = \nu_{16} + \sigma_{16}\frac{(1)}{(1,1)}t + q^{-2}t^2 Z(1,0,0)$$

donde $f_{16} = \pi^3 x^5 + \pi^2 y^3 + z^2$

$$Z(1,0,0) = \nu_{17} + \sigma_{17}\frac{(1)}{(1,1)}t + q^{-1}tZ(0,2,1)$$

donde $f_{17} = \pi x^5 + y^3 + z^2$

$$Z(0,2,1) = \nu_{18} + \sigma_{18}\frac{(1)}{(1,1)}t + q^{-1}tZ(4,1,0)$$

donde $f_{18} = x^5 + \pi^2 y^3 + \pi z^2$

$$Z(4,1,0) = \nu_{19} + \sigma_{19}\frac{(1)}{(1,1)}t + q^{-1}tZ(3,0,1)$$

donde $f_{19} = \pi^4 x^5 + \pi y^3 + z^2$

$$Z(3,0,1) = \nu_{20} + \sigma_{20}\frac{(1)}{(1,1)}t + q^{-1}tZ(2,2,0)$$

donde $f_{20} = \pi^3 x^5 + y^3 + \pi z^2$

$$Z(2,2,0) = \nu_{21} + \sigma_{21}\frac{(1)}{(1,1)}t + q^{-1}t^2 Z$$

donde $f_{21} = \pi^2 x^5 + \pi^2 y^3 + z^2$

Por otro lado es claro que

$$\begin{aligned}(1) = q^{-3}q^2(q-1) &= \nu_1 = \nu_2 = \nu_3 = \nu_4 = \nu_6 = \nu_7 = \nu_{10} \\ &= \nu_{12} = \nu_{15} = \nu_{16} = \nu_{18} = \nu_{19} = \nu_{20} = \nu_{21}\end{aligned}$$

y también

$$\begin{aligned}0 &= \sigma_1 = \sigma_2 = \sigma_3 = \sigma_4 = \sigma_6 = \sigma_7 = \sigma_{10} \\ &= \sigma_{12} = \sigma_{15} = \sigma_{16} = \sigma_{18} = \sigma_{19} = \sigma_{20} = \sigma_{21}\end{aligned}$$

y como

$$y^3 + z^2 = \overline{f_5} = \overline{f_9} = \overline{f_{13}} = \overline{f_{17}}$$

$$x^5 + z^2 = \overline{f_8} = \overline{f_{14}} \qquad x^5 + y^3 = \overline{f_{11}}$$

entonces

$$\nu_5 = \nu_9 = \nu_{13} = \nu_{17} \qquad \sigma_5 = \sigma_9 = \sigma_{13} = \sigma_{17}$$

y

$$\nu_8 = \nu_{14} \qquad \sigma_8 = \sigma_{14}$$

también como $\overline{f_5}$ tiene q puntos singulares, los de la forma $(\overline{x}, 0, 0)$ donde $\overline{x} \in \mathbb{F}_q$ tenemos que $\sigma_5 = 1 - q^{-2} - \nu_5$, de manera análoga $\sigma_8 = 1 - q^{-2} - \nu_8$ y $\sigma_{11} = 1 - q^{-2} - \nu_{11}$.

Reuniendo todo esto tenemos

$$\int_{\mathcal{O}_K^3} |x^5 + y^3 + z^2|_K^s \, |dx\, dy\, dz| =$$

$$\frac{\nu_0(1,1) + \sigma_0(1)t}{(1,1)(31,30)}$$

$$+\frac{(1)\big(q^{-3}t^2 \sum_{i=0}^{3}(q^{-1}t)^i + q^{-9}t^8(1,1)_+ + q^{-15}t^{14}(3,2)_+ + q^{-23}t^{21}(1,1)_+\big)}{(31,30)}$$

$$+\frac{\big(q^{-27}t^{25} \sum_{i=0}^{3}(q^{-1}t)^i\big)}{(31,30)}$$

$$+\frac{\big(\nu_5(1,1) + (1 - q^{-2} - \nu_5)(1)t\big)q^{-8}t^6 \sum_{i=0}^{3}(q^{-1}t)^{6i}}{(1,1)(31,30)}$$

$$+\frac{\big(\nu_8(1,1) + (1 - q^{-2} - \nu_8)(1)t\big)q^{-12}t^{10}(10,10)_+}{(1,1)(31,30)}$$

$$+\frac{\big(\nu_{11}(1,1) + (1 - q^{-2} - \nu_{11})(1)t\big)q^{-17}t^{15}}{(1,1)(31,30)}$$

□

4.1.4. Cálculo para A_r

Teorema 4.4. Sea K un cuerpo local no arquimediano, si la característica de $\mathcal{O}_K/\pi\mathcal{O}_K$ no divide a $r+1$, entonces la función zeta local de Igusa asociada a $A_r = x^{r+1} - yz$ viene dada por

$$\int_{\mathcal{O}_K^3} |A_{2l+1}|_K^s \, |dx\, dy\, dz| = \frac{(1)(3,1)}{(1,1)(2l+6, 2l+2)} + \frac{q^{-3}t^2(1)^2(1,1)_+ \sum_{i=0}^{l-1}\big(q^{-1}t\big)^{2i}}{(1,1)(2l+6, 2l+2)},$$

en el caso en el que r es impar y

$$\int_{\mathcal{O}_K^3} |A_{2l}|_K^s \, |dx\, dy\, dz| = \frac{(1)\big(1 - q^{-3}t + q^{-2l-3}t^{2l+1} - q^{-2l-4}t^{2l+2}\big)}{(1,1)(4l+4, 4l+2)}$$
$$+ \frac{(1)^2(1,1)_+\big(q^{-3}t^2(2l+1,2l)_+ \sum_{i=0}^{l-2}\big(q^{-1}t\big)^{2i} + q^{-2l-1}t^{2l} + q^{-4l-2}t^{4l}\big)}{(1,1)(4l+4,4l+2)},$$

en el caso en el que r es par.

Demostración. Las siguientes integrales serán útiles; de aquí en adelante $t = q^{-s}$

$$\int_{\mathcal{O}_K^3} |\pi^m x^{r+1} - yz|_K^s \, |dx\, dy\, dz| =$$
$$(1-q^{-1})^2 + 2q^{-1}\frac{(1-q^{-1})^2}{1-q^{-1}t}t + q^{-2}t^2 \int_{\mathcal{O}_K^3} |\pi^{m-2} x^{r+1} - yz|_K^s \, |dx\, dy\, dz|,$$

ya que al aplicar **FFE** en este caso tenemos $\overline{f} = -yz$ y $\nu = q^{-3}q(q-1)^2$, $\sigma = 2q^{-3}q(q-1)$ luego si

$$I_m = \int_{\mathcal{O}_K^3} |\pi^m x^{r+1} - yz|_K^s \, |dx\, dy\, dz|,$$

entonces una aplicación de **FFE** produce

$$I_m = (1,0)^2\left(1 + \frac{2q^{-1}}{(1,1)}t\right) + q^{-2}t^2 I_{m-2},$$

donde $(a,b) = 1 - q^{-a}t^b$, por otro lado es claro que

$$I_0 = \int_{\mathcal{O}_K^3} |x^{r+1} - yz|_K^s \, |dx\, dy\, dz| = Z(A_r, s),$$

ahora inductivamente se puede comprobar que

$$I_{2l} = (1,0)^2\left(1 + \frac{2q^{-1}}{(1,1)}t\right)\sum_{i=0}^{l-1}(q^{-1}t)^{2i} + q^{-2l}t^{2l}Z(A_r, s),$$

y

$$I_{2l+1} = (1,0)^2\left(1 + \frac{2q^{-1}}{(1,1)}t\right)\sum_{i=0}^{l-1}(q^{-1}t)^{2i} + q^{-2l}t^{2l}I_1,$$

y por otro lado con una aplicación de **FFE** tenemos

$$I_1 = (1,0)^2 + 2q^{-1}\frac{(1,0)^2}{(1,1)}t + q^{-2}t\int_{\mathcal{O}_K^3} |x^{r+1} - \pi, yz|_K^s \, |dx\, dy\, dz|$$

nuevamente utilizando **FFE** obtenemos

$$\int_{\mathcal{O}_K^3} |x^{r+1} - \pi yz|_K^s \, |dx\, dy\, dz| = 1 - q^{-1} + q^{-1} t \int_{\mathcal{O}_K^3} |\pi^r x^{r+1} - yz|_K^s \, |dx\, dy\, dz|,$$

con lo cual obtenemos

$$I_1 = (1,0)^2 + 2q^{-1} \frac{(1,0)^2}{(1,1)} t + (1,0) q^{-2} t + q^{-3} t^2 I_r,$$

ahora aplicando **FFE** obtenemos

$$\int_{\mathcal{O}_K^3} |A_r|_K^s \, |dx\, dy\, dz| = \nu + \sigma \frac{(1,0)}{(1,1)} t + q^{-3} t^2 \int_{\mathcal{O}_K^3} |\pi^{r-1} x^{r+1} - yz|_K^s \, |dx\, dy\, dz|,$$

ahora contemos los $(x, y, z) \in \mathbb{F}_q^3$ tales que $x^{r+1} = yz$

- si $x = 0$ y $y = 0$ entonces z esta libre, luego hay q puntos.
- si $x = 0$ y $z = 0$ entonces y es libre $\neq 0$, y tenemos $q - 1$ soluciones.
- si $x \neq 0$, entonces $y, z \neq 0$ y dado y el correspondiente z es único y recíprocamente, luego tenemos $(q-1)^2$ soluciones.

en total hay q^2 puntos en la hipersuperficie $V_{\mathbb{F}_q^3}(A_r)$

luego $\nu = q^{-3}(q^3 - q^2) = 1 - q^{-1}$, ahora fácilmente se ve que el único punto singular de $V_{\mathbb{F}_q^3}(A_r)$ es $(0,0,0)$, luego $\sigma = q^{-3}(q^2 - 1)$, por lo tanto tenemos

$$\int_{\mathcal{O}_K^3} |A_r|_K^s \, |dx\, dy\, dz| = (1,0) + q^{-1}(2,0) \frac{(1,0)}{(1,1)} t + q^{-3} t^2 I_{r-1};$$

Primer Caso $r = 2l + 1$

$$\int_{\mathcal{O}_K^3} |A_{2l+1}|_K^s \, |dx\, dy\, dz| = (1,0) + q^{-1}(2,0) \frac{(1,0)}{(1,1)} t + q^{-3} t^2 I_{2l};$$

pero recordemos que

$$I_{2l} = (1,0)^2 \left(1 + \frac{2q^{-1}}{(1,1)} t\right) \sum_{i=0}^{l-1} (q^{-1} t)^{2i} + q^{-2l} t^{2l} Z(A_{2l+1}, s),$$

por lo tanto tenemos que

$$\int_{\mathcal{O}_K^3} |A_{2l+1}|_K^s \, |dx\, dy\, dz| = \frac{(1)(3,1)}{(1,1)(2l+6, 2l+2)} + \frac{q^{-3} t^2 (1)^2 (1,1)_+ \sum_{i=0}^{l-1} \left(q^{-1} t\right)^{2i}}{(1,1)(2l+6, 2l+2)}.$$

Segundo Caso $r = 2l$

$$\int_{\mathcal{O}_K^3} |A_{2l}|_K^s \, |dx\, dy\, dz| = (1,0) + q^{-1}(2,0)\frac{(1,0)}{(1,1)}t + q^{-3}t^2 I_{2l-1},$$

pero

$$I_{2l-1} = (1,0)^2\left(1 + \frac{2q^{-1}}{(1,1)}t\right)\sum_{i=0}^{l-2}(q^{-1}t)^{2i} + q^{-2(l-1)}t^{2(l-1)}I_1;$$

y recordemos que

$$I_1 = (1,0)^2 + 2q^{-1}\frac{(1,0)^2}{(1,1)}t + (1,0)q^{-2}t + q^{-3}t^2 I_{2l},$$

y nuevamente recordemos que

$$I_{2l} = (1,0)^2\left(1 + \frac{2q^{-1}}{(1,1)}t\right)\sum_{i=0}^{l-1}(q^{-1}t)^{2i} + q^{-2l}t^{2l}Z(A_{2l}, s),$$

por lo tanto

$$\int_{\mathcal{O}_K^3} |A_{2l}|_K^s \, |dx\, dy\, dz| = \frac{(1)\big(1 - q^{-3}t + q^{-2l-3}t^{2l+1} - q^{-2l-4}t^{2l+2}\big)}{(1,1)(4l+4, 4l+2)}$$
$$+ \frac{(1)^2(1,1)_+\big(q^{-3}t^2(2l+1, 2l)_+ \sum_{i=0}^{l-2}\big(q^{-1}t\big)^{2i} + q^{-2l-1}t^{2l} + q^{-4l-2}t^{4l}\big)}{(1,1)(4l+4, 4l+2)}.$$

$\square$

4.1.5. Cálculo para D_r

Teorema 4.5. Sea K un cuerpo local no arquimediano, si la característica de $\mathcal{O}_K/\pi\mathcal{O}_K$ no divide a $r-1$ y es diferente de 2, entonces la función zeta local de Igusa asociada a $D_r = x^{r-1} - xy^2 + z^2$ viene dada por

$$Z(D_{2l+1}, s) =$$

$$\frac{\nu_0(1,1) + \sigma_0(1)t + q^{-(2l+1)}t^{2l}\big(\nu_{I_0}(1,1) + \sigma_{I_0}(1)t\big)}{(1,1)(4l+1, 4l)}$$
$$+ \frac{(1)(1,1)\big(q^{-3}t^2(2l, 2l)_+ + (1)q^{-4}t^3\big)\sum_{i=0}^{l-2}\big(q^{-1}t\big)^{2i}}{(1,1)(4l+1, 4l)}$$
$$+ \frac{(1)^2q^{-5}t^4(2l-1, 2l-1)_+}{(1,1)(4l+1, 4l)},$$

en el caso en el que r es impar y

$$Z(D_{2l}, s) =$$

$$\frac{(1,1)\big(\nu_0 + (1)q^{-2l+1}t^{2l-2} + \nu_{I_1} q^{-2l}t^{2l-1} + (1)q^{-2l-2}t^{2l}\big)}{(1,1)(4l-1, 4l-2)}$$
$$+ \frac{(1)\big(\sigma_0 t + \sigma_{I_1} q^{-2l}t^{2l}\big) + (1)^2 q^{-5}t^4\big(1 + q^{-2l+1}t^{2l-1}\big)\sum_{i=0}^{l-3}\big(q^{-1}t\big)^{2i}}{(1,1)(4l-1, 4l-2)}$$
$$+ \frac{(1)(1,1)q^{-3}t^2\big(1 + (1)q^{-1}t + q^{-2l}t^{2l}\big)\sum_{i=0}^{l-3}\big(q^{-1}t\big)^{2i}}{(1,1)(4l-1, 4l-2)},$$

en el caso en el que sea par.

Demostración. Las siguientes integrales serán útiles

$$I_m = \int_{\mathcal{O}_K^3} |\pi^m x^{r-1} - \pi x y^2 + z^2|_K^s \, |dx\, dy\, dz|,$$

con una aplicación de **FFE** tenemos

$$I_m = (1,0) + q^{-1}t \int_{\mathcal{O}_K^3} |\pi^{m-1} x^{r-1} - x y^2 + \pi z^2|_K^s \, |dx\, dy\, dz|,$$

y aplicando nuevamente **FFE** a esta última integral tenemos

$$\int_{\mathcal{O}_K^3} |\pi^{m-1} x^{r-1} - x y^2 + \pi z^2|_K^s \, |dx\, dy\, dz| = (1,0)^2 + q^{-1}\frac{(1,0)^2}{(1,1)}t + q^{-1}t I_{m-2},$$

ya que en este caso $\overline{f} = -xy^2$, $N(xy^2 = 0) = 2q^2 - q$ y la cantidad de puntos singulares de esta curva es q^2; colocando todo esto tenemos

$$I_m = (1,0) + (1,0)^2 q^{-1}t + \frac{q^{-2}(1,0)^2}{(1,1)}t^2 + q^{-2}t^2 I_{m-2},$$

de manera inductiva se puede ver que

$$I_{2m} = \left((1,0) + (1,0)^2 q^{-1}t + \frac{(1,0)^2}{(1,1)}q^{-2}t^2\right)\sum_{i=0}^{m-1}\big(q^{-1}t\big)^{2i} + q^{-2m}t^{2m} I_0,$$

análogamente

$$I_{2m+1} = \left((1,0) + (1,0)^2 q^{-1}t + \frac{(1,0)^2}{(1,1)}q^{-2}t^2\right)\sum_{i=0}^{m-1}\big(q^{-1}t\big)^{2i} + q^{-2m}t^{2m} I_1,$$

calculemos I_0 en este caso $\overline{f_{I_0}} = x^{r-1} + z^2$ así $Sing_{\mathbb{F}_q}\left(\overline{f_{I_0}}\right) = \{0\} \times \mathbb{F}_q \times \{0\}$ luego con una aplicación de **FFE** resulta

$$I_0 = \nu_{I_0} + \sigma_{I_0} \frac{(1,0)}{(1,1)} t + q^{-2} t^2 \int_{\mathcal{O}_K^3} |\pi^{r-3} x^{r-1} - xy^2 + z^2|_K^s \, |dx\, dy\, dz|,$$

luego sea

$$K_m = \int_{\mathcal{O}_K^3} |\pi^m x^{r-1} - xy^2 + z^2|_K^s \, |dx\, dy\, dz|,$$

para esta integral tenemos $\overline{f} = x^{r-1} + z^2$, así calculemos el número de ceros de esta última curva sobre $\mathbb{F}_q$

- si $z = 0$ y $x = 0$, entonces y es libre, luego tenemos q soluciones
- si $z = 0$ y $y = 0$, entonces x es libre $\neq 0$, en este caso tenemos $q - 1$ soluciones
- si $z \neq 0$ entonces $x, y \neq 0$ y en este caso si z y y son arbitrarios x es único, y recíprocamente; de esta manera tenemos $(q-1)^2$ soluciones

en total tenemos q^2 soluciones y también es fácil ver que el conjunto de puntos singulares de esta curva es $\mathbb{F}_q \times \{0\} \times \{0\}$ de esta manera aplicando **FFE** obtenemos

$$K_m = (1,0) + q^{-1} \frac{(1,0)^2}{(1,1)} t + q^{-2} t^2 K_{m-2},$$

es obvio que $K_0 = Z(D_r, s)$ y fácilmente se que

$$K_{2m} = \left((1,0) + q^{-1} \frac{(1,0)^2}{(1,1)} t \right) \sum_{i=0}^{m-1} \left(q^{-1} t \right)^{2i} + q^{-2m} t^{2m} Z(D_r, s),$$

ahora calcularemos

$$I_1 = \int_{\mathcal{O}_K^3} |\pi x^{r-1} - \pi x y^2 + z^2|_K^s \, |dx\, dy\, dz|,$$

y una aplicación de **FFE** produce

$$I_1 = (1,0) + q^{-1} t \int_{\mathcal{O}_K^3} |x^{r-1} - xy^2 + \pi z^2|_K^s \, |dx\, dy\, dz|,$$

en este caso $\overline{f} = x^{r-1} - xy^2$, así sean ν_{I_1}, σ_{I_1} con su significado usual luego tenemos

$$\int_{\mathcal{O}_K^3} |x^{r-1} - xy^2 + \pi z^2|_K^s \, |dx\, dy\, dz| =$$

$$\nu_{I_1} + \sigma_{I_1} \frac{(1,0)}{(1,1)} t + q^{-2} t \int_{\mathcal{O}_K^3} |\pi^{r-2} x^{r-1} - \pi^2 x y^2 + z^2|_K^s \, |dx\, dy\, dz|,$$

y nuevamente una aplicación de **FFE** a esta última integral produce

$$\int_{\mathcal{O}_K^3} |\pi^{r-2}x^{r-1} - \pi^2 xy^2 + z^2|_K^s \, |dx\, dy\, dz| =$$

$$(1,0) + q^{-1}t^2 \int_{\mathcal{O}_K^3} |\pi^{r-4}x^{r-1} - xy^2 + z^2|_K^s \, |dx\, dy\, dz|;$$

Utilizando todo esto obtenemos

$$I_1 = (1,0) + \nu_{I_1} q^{-1}t + \sigma_{I_1} \frac{(1,0)}{(1,1)} q^{-1}t^2 + (1,0)q^{-3}t^2 + q^{-4}t^4 K_{r-4},$$

con todo esto podemos ahora calcular $Z(D_r, s)$

Primer Caso $r = 2l+1$

en este caso tenemos

$$Z(D_r, s) = \nu_0 + \sigma_0 \frac{(1,0)}{(1,1)} t + q^{-3}t^2 I_{2(l-1)},$$

con ν_0, σ_0 con su significado usual para $\overline{f} = x^{r-1} - xy^2 + z^2$ y recordando que

$$I_{2(l-1)} = \left((1,0) + (1,0)^2 q^{-1}t + \frac{(1,0)^2}{(1,1)} q^{-2}t^2 \right) \sum_{i=0}^{l-2} \left(q^{-1}t\right)^{2i} + q^{-2(l-1)}t^{2(l-1)} I_0,$$

$$I_0 = \nu_{I_0} + \sigma I_0 \frac{(1,0)}{(1,1)} t + q^{-2}t^2 K_{2(l-1)},$$

$$K_{2(l-1)} = \left((1,0) + q^{-1} \frac{(1,0)^2}{(1,1)} t \right) \sum_{i=0}^{l-2} \left(q^{-1}t\right)^{2i} + q^{-2(l-1)}t^{2(l-1)} Z(D_r, s),$$

con todo esto tenemos

$$Z(D_{2l+1}, s) =$$

$$\begin{aligned} & \frac{\nu_0(1,1) + \sigma_0(1)t + q^{-(2l+1)}t^{2l}\left(\nu_{I_0}(1,1) + \sigma_{I_0}(1)t\right)}{(1,1)(4l+1,4l)} \\ & + \frac{(1)(1,1)\left(q^{-3}t^2(2l,2l)_+ + (1)q^{-4}t^3\right)\sum_{i=0}^{l-2}\left(q^{-1}t\right)^{2i}}{(1,1)(4l+1,4l)} \\ & + \frac{(1)^2 q^{-5}t^4(2l-1,2l-1)_+}{(1,1)(4l+1,4l)} \end{aligned}$$

Segundo Caso $r = 2l$

en este caso tenemos

$$Z(D_r, s) = \nu_0 + \sigma_0 \frac{(1,0)}{(1,1)} t + q^{-3}t^2 I_{2l-3)},$$

con ν_0, σ_0 con su significado usual para $\overline{f} = x^{r-1} - xy^2 + z^2$ y recordando que

$$I_{2(l-2)+1} = \left((1,0) + (1,0)^2 q^{-1}t + \frac{(1,0)^2}{(1,1)} q^{-2}t^2\right) \sum_{i=0}^{l-3} \left(q^{-1}t\right)^{2i} + \left(q^{-1}t\right)^{2l-4} I_1,$$

$$I_1 = (1,0) + \nu_{I_1} q^{-1}t + \sigma_{I_1} \frac{(1,0)}{(1,1)} q^{-1}t^2 + (1,0)q^{-3}t^2 + q^{-4}t^4 K_{2l-4},$$

$$K_{2(l-2)} = \left((1,0) + q^{-1}\frac{(1,0)^2}{(1,1)} t\right) \sum_{i=0}^{l-3} \left(q^{-1}t\right)^{2i} + q^{-2(l-2)} t^{2(l-2)} Z(D_r, s),$$

con todo esto tenemos

$$Z(D_{2l}, s) =$$

$$\frac{(1,1)\left(\nu_0 + (1)q^{-2l+1}t^{2l-2} + \nu_{I_1} q^{-2l}t^{2l-1} + (1)q^{-2l-2}t^{2l}\right)}{(1,1)(4l-1, 4l-2)}$$
$$+ \frac{(1)\left(\sigma_0 t + \sigma_{I_1} q^{-2l}t^{2l}\right) + (1)^2 q^{-5}t^4 \left(1 + q^{-2l+1}t^{2l-1}\right) \sum_{i=0}^{l-3} \left(q^{-1}t\right)^{2i}}{(1,1)(4l-1, 4l-2)}$$
$$+ \frac{(1)(1,1)q^{-3}t^2 \left(1 + (1)q^{-1}t + q^{-2l}t^{2l}\right) \sum_{i=0}^{l-3} \left(q^{-1}t\right)^{2i}}{(1,1)(4l-1, 4l-2)}$$

□

4.2. Formas fuertemente no degeneradas

Sea K un cuerpo local no arquimediano, $f(x) \in \mathcal{O}_K[x]$, $x = (x_1, \ldots, x_n)$ se llama una forma fuertemente no degenerada si este es un polinomio homogéneo de grado d, y el único cero singular de $\overline{f}$ sobre $\mathcal{O}_K/\pi\mathcal{O}_K$ es $\{0\}$.

Las series de Poincaré para este tipo de polinomios han sido calculadas explícitamente, primero en el caso en que $K = \mathbb{Q}_p$ por J. Goldman [G], y después en el caso en que K tiene característica positiva por V. Albis y R. Chaparro [A-C]; en los dos casos el método consiste en encontrar recurrencias para el numero de soluciones de $f(x) \equiv 0 \pmod{\pi^m \mathcal{O}_K}$, para después encontrar la serie de Poincaré. Nosotros calcularemos con la ayuda de la fórmula de la fase estacionaria π-ádica de Igusa la función zeta local, independientemente de la característica, y luego con esta la serie de Poincaré.

Como hemos dicho J. Goldman calculo la serie de Poincaré en el caso $K = \mathbb{Q}_p$, el obtiene el siguiente resultado

Teorema 4.6. [G, pag 588] Sea $f(x_1,\ldots,x_n)$ una forma fuertemente no degenerada de grado d con coeficientes en $\mathbb{Z}_p$, el anillo de los enteros p-ádicos, entonces la serie de Poincaré de f es

$$P_f(t) = \frac{R(t)}{(1-p^{n-1}t)(1-p^{n(d-1)}t^d)}$$

donde $R(t)$ es un polinomio de grado d, el cual se puede calcular de forma efectiva.

Nosotros empezaremos con el siguiente

Teorema 4.7. Sea $f(x) \in \mathcal{O}_K[x]$, $x = (x_1,\ldots,x_n)$ una forma fuertemente no degenerada de grado d, entonces su función zeta local de Igusa es

$$\int_{\mathcal{O}_K^n} |f(x)|_K^s \, |dx| = \frac{\nu(\overline{f})(1-q^{-1}t) + \sigma(\overline{f})(1-q^{-1})t}{(1-q^{-1}t)(1-q^{-n}t^d)}$$

Demostración. Una aplicación de **FFE** produce

$$\int_{\mathcal{O}_K^n} |f(x)|_K^s \, |dx| = \nu(\overline{f}) + \sigma(\overline{f})\frac{(1-q^{-1})t}{1-q^{-1}t} + \int_{(\pi\mathcal{O}_K)^n} |f(x)|_K^s \, |dx|$$

y como $f(x)$ es una forma de grado d tenemos

$$\int_{(\pi\mathcal{O}_K)^n} |f(x)|_K^s \, |dx| = q^{-n}t^d \int_{\mathcal{O}_K^n} |f(x)|_K^s \, |dx|$$

por lo tanto

$$\int_{\mathcal{O}_K^n} |f(x)|_K^s \, |dx| = \nu(\overline{f}) + \sigma(\overline{f})\frac{(1-q^{-1})t}{1-q^{-1}t} + q^{-n}t^d \int_{\mathcal{O}_K^n} |f(x)|_K^s \, |dx|$$

con lo cual

$$\int_{\mathcal{O}_K^n} |f(x)|_K^s \, |dx| = \frac{\nu(\overline{f})(1-q^{-1}t) + \sigma(\overline{f})(1-q^{-1})t}{(1-q^{-1}t)(1-q^{-n}t^d)}$$

□

Ahora como $\nu(\overline{f}) = q^{-n}(q^n - c_1)$ y ya que f es fuertemente no degenerada, entonces $\sigma(\overline{f}) = q^{-n}(c_1 - 1)$, por lo tanto

$$\int_{\mathcal{O}_K^n} |f(x)|_K^s \, |dx| = \frac{(1-q^{-n}c_1)(1-q^{-1}t) + q^{-n}(c_1-1)(1-q^{-1})t}{(1-q^{-1}t)(1-q^{-n}t^d)}$$

pero recordemos la relación entre la función zeta local de Igusa y la serie de Poincaré

$$\sum_{m=0}^{\infty} c_m \big(q^{-n}t\big)^m = \frac{1-tZ(f,s)}{1-t}$$

con lo cual

$$\sum_{m=0}^{\infty} c_m \big(q^{-n}t\big)^m =$$

$$\frac{(1-q^{-1}t)(1-q^{-n}t^d)-(1-q^{-n}c_1)(1-q^{-1}t)t-q^{-n}(c_1-1)(1-q^{-1})q^{-n}t^2}{(1-t)(1-q^{-1}t)(1-q^{-n}t^d)}$$

$$= \frac{(1-t)\big(1-(q^{-1}-q^{-n}c_1)t-q^{-n}(q^{-1}-1)\sum_{i=2}^{d-1} t^i - q^{-n-1}t^d\big)}{(1-t)(1-q^{-1}t)(1-q^{-n}t^d)}$$

$$= \frac{1-(q^{-1}-q^{-n}c_1)t-q^{-n}(q^{-1}-1)\sum_{i=2}^{d-1} t^i - q^{-n-1}t^d}{(1-q^{-1}t)(1-q^{-n}t^d)}$$

y por lo tanto

$$\sum_{m=0}^{\infty} c_m t^m =$$

$$\frac{1-(q^{-n-1}-c_1)t-q^{-n}(q^{-1}-1)\sum_{i=2}^{d-1}\big(q^n t\big)^i - q^{n(d-1)-1}t^d}{(1-q^{n-1}t)(1-q^{n(d-1)}t^d)}$$

en concordancia con el resultado de J. Goldman.

4.3. La función zeta local de Igusa para $(x^2 - y^3)(x^5 - y^3)$

Este polinomio es un buen ejemplo para mostrar, el no es cuasihomogéneo ni semicuasihomogéneo, este ejemplo ilustra muy bien varias técnicas usadas en el calculo de las funciones zeta locales de Igusa. En [G-K] S. Gray y K. Karlof calculan la función zeta local de Igusa para $(x^2-y^3)(x^3-y^2)$ en el caso en que $K = \mathbb{Q}_p$, nosotros siguiendo sus ideas calcularemos la función zeta para $(x^2-y^3)(x^5-y^3)$ en el caso de K arbitrario.

Primero unos preliminares.

Sea $P(t) \in \mathcal{O}_K[[t_1,\ldots,t_r]]$, $P(t)$ es llamada una serie de potencias restringida especial, de manera abreviada SRE, si $P(0)=0$ y el coeficiente de todo monomio de grado positivo d en $P(t)$ esta en $\pi^{d-1}\mathcal{O}_K$. El siguiente lema clave lo podrá encontrar el lector en [I3]

Lema 4.1. Sean $\psi_1(x),\ldots,\psi_n(x)$ n SRE en $\mathcal{O}_K[[x_1,\ldots,x_n]]$ tales que

$$\frac{\partial(\psi_1,\ldots,\psi_n)}{\partial(x_1,\ldots,x_n)}(0) \not\equiv 0 \pmod{\pi\mathcal{O}_K}$$

entonces $y = \psi(x)$, es decir $y_i = \psi_i(x)$, produce un homeomorfismo analítico de $\mathcal{O}_K^n$ sobre si mismo que preserva la medida.

Este lema nos servirá en algunos cambios de variables que haremos.

Teorema 4.8. Sea K un cuerpo local no arquimediano tal que la característica de $\mathcal{O}_K/\pi\mathcal{O}_K$ es diferente de 2, 3, 5 y 11; Entonces la función zeta local de Igusa asociada a $(x^2-y^3)(x^5-y^3)$ viene dada por

$$\begin{aligned}\int_{\mathcal{O}_K^2} |(x^2-y^3)(x^5-y^3)|_K^s\,|dx\,dy| &= \nu_0 + \sigma_0\frac{(1-q^{-1})t}{(1-q^{-1}t)} \\ &+ \big(|S|-1\big)q^{-2}t^2\frac{(1-q^{-1})^2}{(1-q^{-1}t)^2} \\ &\frac{(1-q^{-1})^2q^{-2}t^5}{1-q^{-2}t^5} + \frac{q^{-9}t^{23}(1-q^{-1})^2(1+q^{-1}t^3)}{(1-q^{-2}t^5)(1-q^{-8}t^{21})} \\ &+ \frac{q^{-7}t^{17}(1-q^{-1})^2}{(1-q^{-2}t^5)(1-q^{-5}t^{12})} \\ &+ \frac{q^{-2}t^5}{1-q^{-8}t^{21}}\Big(A_1(t)+q^{-2}t^5A_2(t)+q^{-4}t^{10}A_3(t)\Big) \\ &+ \frac{q^{-2}t^5}{1-q^{-5}t^{12}}\Big(B_1(t)+q^{-2}t^5B_2(t)\Big).\end{aligned}$$

donde

$$\begin{aligned}A_1(t) &= q^{-1}t^2(1),\\ A_2(t) &= q^{-1}t^3(1)\big((1)+q^{-1}t\big),\\ A_3(t) &= q^{-1}t^3(1)^2 + q^{-2}t^6\big(\nu(\mathcal{O}_K^\times\times\mathcal{O}_K, f_A) + \sigma(\mathcal{O}_K^\times\times\mathcal{O}_K, f_A)\frac{(1)}{(1,1)}t\big),\end{aligned}$$

y $B_1(t) = q^{-1}t(1-q^{-1})$, $B_2(t) = q^{-3}t^2\nu(\pi\mathcal{O}_K\times\mathcal{O}_K^\times, f_b)$, donde $f_b = x^2-y^3$.

Demostración. Sea así $f_0 = (x^2-y^3)(x^5-y^3)$, luego $\overline{f_0} = f_0$ y

$$\frac{\partial\overline{f_0}}{\partial x} = 2x(x^5-y^3) + 4x^5(x^2-y^3)$$

$$\frac{\partial\overline{f_0}}{\partial y} = -3y^2(x^5-y^3) - 3y^2(x^2-y^3)$$

por lo tanto $(0,0)$ es un punto singular de $\overline{f_0}$, sea R un levantamiento de $(\mathcal{O}_K/\pi\mathcal{O}_K)^2$ en $\mathcal{O}_K^2$, construido de representantes de Teichmüller.

La primera aplicación de **FFE** produce

$$\int_{\mathcal{O}_K^2} |(x^2-y^3)(x^5-y^3)|_K^s\,|dx\,dy| = \nu_0 + \sigma_0\frac{(1)}{(1,1)}t$$

$$+\sum_{(a,b)\in S}\int_{(a,b)+(\pi\mathcal{O}_K)^2} |(x^2-y^3)(x^5-y^3)|_K^s\,|dx\,dy|$$

donde S es un levantamiento de $Sing_{\overline{f_0}}(\mathbb{F}_q)$, luego $(0,0)\in S$ y podemos escribir

$$\int_{\mathcal{O}_K^2} |(x^2-y^3)(x^5-y^3)|_K^s\,|dx\,dy| = \nu_0+\sigma_0\frac{(1)}{(1,1)}t$$
$$+\sum_{(a,b)\in S\smallsetminus\{(0,0)\}}\int_{(a,b)+(\pi\mathcal{O}_K)^2} |(x^2-y^3)(x^5-y^3)|_K^s\,|dx\,dy|$$
$$+\int_{(\pi\mathcal{O}_K)^2} |(x^2-y^3)(x^5-y^3)|_K^s\,|dx\,dy|$$

Cálculo sobre las singularidades no nulas En este tipo de singularidades podemos utilizar SRE para hacer cambios de variable y obtener integrales mas simples.

Sea $(a,b)\in S\smallsetminus\{(0,0)\}$, calculemos

$$\int_{(a,b)+(\pi\mathcal{O}_K)^2} |(x^2-y^3)(x^5-y^3)|_K^s\,|dx\,dy|$$

el cambio de variables $(x,y)\mapsto(a+\pi x, b+\pi y)$ produce

$$\int_{(a,b)+(\pi\mathcal{O}_K)^2} |(x^2-y^3)(x^5-y^3)|_K^s\,|dx\,dy| =$$
$$q^{-2}\int_{\mathcal{O}_K^2} |((a+\pi x)^2-(b+\pi y)^3)((a+\pi x)^5-(b+\pi y)^3)|_K^s\,|dx\,dy|$$

$$= q^{-2}\int_{\mathcal{O}_K^2} |\big((a^2-b^3)+\pi(2ax+\pi x^2-3b^2y-3b\pi y^2-\pi^2y^3)\big)$$
$$\big((a^5-b^3)+\pi(5a^4x+10a^3\pi x^2+10a^2\pi^2x^3+5a\pi^3x^4+\pi^4x^5-3b^2y-3b\pi y^2-\pi^2y^3)\big)|_K^s\,|dx\,dy|$$

ahora como $(a,b)\in S\smallsetminus\{(0,0)\}$ tenemos que $(a^2-b^3)(a^5-b^3)\in\pi\mathcal{O}_K$, luego hay dos posibilidades

- $(a^2-b^3)\in\pi\mathcal{O}_K$, pero recordemos que también $2a(a^5-b^3)+4a^5(a^2-b^3)\in\pi\mathcal{O}_K$ luego $2a(a^5-b^3)\in\pi\mathcal{O}_K$ y como $2a\notin\pi\mathcal{O}_K$ entonces $(a^5-b^3)\in\pi\mathcal{O}_K$.
- $(a^5-b^3)\in\pi\mathcal{O}_K$ de manera análoga obtenemos que $(a^2-b^3)\in\pi\mathcal{O}_K$.

luego siempre $(a^2-b^3)\in\pi\mathcal{O}_K$ y $(a^5-b^3)\in\pi\mathcal{O}_K$, sea pues $a^2-b^3=\pi c$ y $a^5-b^3=\pi d$ por lo tanto

$$\int_{(a,b)+(\pi\mathcal{O}_K)^2}|(x^2-y^3)(x^5-y^3)|_K^s\,|dx\,dy| =$$

$$q^{-2}t^2\int_{\mathcal{O}_K^2}|\big(c+2ax+\pi x^2-3b^2y-3b\pi y^2-\pi^2y^3\big)$$

$$\big(d+5a^4x+10a^3\pi x^2+10a^2\pi^2x^3+5a\pi^3x^4+\pi^4x^5-3b^2y-3b\pi y^2-\pi^2y^3\big)|_K^s\,|dx\,dy|$$

luego si hacemos el cambio de variable

$$u=\psi_1(x,y)=c+2ax+\pi x^2-3b^2y-3b\pi y^2-\pi^2y^3$$

$$v=\psi_2(x,y)=d+5a^4x+10a^3\pi x^2+10a^2\pi^2x^3+5a\pi^3x^4+\pi^4x^5-3b^2y-3b\pi y^2-\pi^2y^3$$

tenemos, ya que $\psi_1(x,y),\psi_2(x,y)$ son SRE, de hecho son polinomios y

$$\frac{\partial(\psi_1,\psi_2)}{\partial(x,y)}(0,0)=\begin{vmatrix}2a & -3b^2\\ 5a^4 & -3b^2\end{vmatrix}=ab^2(-6+15a^3)$$

y como $a^2-b^3\in\mathcal{O}_K$ y $a^5-b^3\in\mathcal{O}_K$ entonces $a^5-a^2\in\mathcal{O}_K$, luego como a pertenece al conjunto de representantes de Teichmüller, que recordemos resulta ser también un grupo multiplicativo, tenemos que $a^5=a^2$, con lo cual $a^3=1$ y así $\partial(\psi_1,\psi_2)/\partial(x,y)(0,0)=11ab^2\not\equiv 0 \pmod{\pi\mathcal{O}_K}$ luego por el lema 4.1 tenemos que

$$\int_{(a,b)+(\pi\mathcal{O}_K)^2}|(x^2-y^3)(x^5-y^3)|_K^s\,|dx\,dy| =$$

$$q^{-2}t^2\int_{\mathcal{O}_K^2}|uv|_K^s\,|du\,dv|$$

$$=q^{-2}t^2\Big(\int_{\mathcal{O}_K}|u|_K^s\,|du|\Big)^2$$

$$=q^{-2}t^2\frac{(1-q^{-1})^2}{(1-q^{-1}t)^2}$$

así

$$\sum_{(a,b)\in S\smallsetminus\{(0,0)\}}\int_{(a,b)+(\pi\mathcal{O}_K)^2}|(x^2-y^3)(x^5-y^3)|_K^s\,|dx\,dy| =$$

$$(\mathrm{Card}(S)-1)q^{-2}t^2\frac{(1-q^{-1})^2}{(1-q^{-1}t)^2}$$

luego solo resta calcular la integral sobre $(\pi\mathcal{O}_K)^2$. **Cálculo sobre la singularidad** $(0,0)$ Sea

$$S_1(t)=\int_{(\pi\mathcal{O}_K)^2}|(x^2-y^3)(x^5-y^3)|_K^s\,|dx\,dy|$$

después de un cambio de variables obtenemos

$$S_1(t) = q^{-2}t^5 \int_{\mathcal{O}_K^2} |(x^2 - \pi y^3)(\pi^2 x^5 - y^3)|_K^s \, |dx\, dy|$$

por lo tanto si $f_1 = (x^2 - \pi y^3)(\pi^2 x^5 - y^3)$, entonces $\overline{f}_1 = -x^2 y^3$ y así

$$Sing_{\overline{f}_1}(\mathbb{F}_q) = \big(\mathbb{F}_q^\times \times \{0\}\big) \cup \big(\{0\} \times \mathbb{F}_q^\times\big) \cup \big(\{(0,0)\}\big)$$

por otro lado $\nu_{f_1} = q^{-2}(q-1)^2 = (1)^2$, y en este caso todo cero de $\overline{f}_1$ es singular, así $\sigma_{f_1} = 0$, luego una aplicación de **FFE** produce

$$\begin{aligned} S_1(t) = q^{-2}t^5 \big[(1)^2 &+ \int_{\mathcal{O}_K^\times \times \pi\mathcal{O}_K} |(x^2 - \pi y^3)(\pi^2 x^5 - y^3)|_K^s \, |dx\, dy| \\ &+ \int_{\pi\mathcal{O}_K \times \mathcal{O}_K^\times} |(x^2 - \pi y^3)(\pi^2 x^5 - y^3)|_K^s \, |dx\, dy| \\ &+ \int_{(\pi\mathcal{O}_K)^2} |(x^2 - \pi y^3)(\pi^2 x^5 - y^3)|_K^s \, |dx\, dy|\big] \end{aligned}$$

sea ahora

$$A_1(t) = \int_{\mathcal{O}_K^\times \times \pi\mathcal{O}_K} |(x^2 - \pi y^3)(\pi^2 x^5 - y^3)|_K^s \, |dx\, dy| = \int_{\mathcal{O}_K^\times \times \pi\mathcal{O}_K} |\pi^2 x^5 - y^3|_K^s \, |dx\, dy|$$

ya que en $\mathcal{O}_K^\times \times \pi\mathcal{O}_K$ tenemos que $|x^2 - \pi y^3| = 1$, de manera análoga sea

$$B_1(t) = \int_{\pi\mathcal{O}_K \times \mathcal{O}_K^\times} |(x^2 - \pi y^3)(\pi^2 x^5 - y^3)|_K^s \, |dx\, dy| = \int_{\pi\mathcal{O}_K \times \mathcal{O}_K^\times} |x^2 - \pi y^3|_K^s \, |dx\, dy|$$

y

$$S_2(t) = \int_{(\pi\mathcal{O}_K)^2} |(x^2 - \pi y^3)(\pi^2 x^5 - y^3)|_K^s \, |dx\, dy|$$

luego

$$S_1(t) = q^{-2}t^5 \left((1)^2 + A_1(t) + B_1(t) + S_2(t)\right)$$

de la misma manera obtenemos

$$S_2(t) = q^{-2}t^5 \left((1)^2 + A_2(t) + B_2(t) + S_3(t)\right)$$

donde

$$A_2(t) = \int_{\mathcal{O}_K^\times \times \pi\mathcal{O}_K} |\pi^4 x^5 - y^3|_K^s \, |dx\, dy|$$

$$B_2(t) = \int_{\pi\mathcal{O}_K \times \mathcal{O}_K^\times} |x^2 - \pi^2 y^3|_K^s \, |dx\, dy|$$

y

$$S_3(t)=\int_{(\pi\mathcal{O}_K)^2}|(x^2-\pi^2y^3)(\pi^4x^5-y^3)|_K^s\,|dx\,dy|$$

siguiendo de esta manera obtenemos para todo $n\geq 1$

$$S_n(t)=q^{-2}t^5\left((1)^2+A_n(t)+B_n(t)+S_{n+1}(t)\right)$$

donde

$$A_n(t)=\int_{\mathcal{O}_K^\times\times\pi\mathcal{O}_K}|\pi^{2n}x^5-y^3|_K^s\,|dx\,dy|$$

$$B_n(t)=\int_{\pi\mathcal{O}_K\times\mathcal{O}_K^\times}|x^2-\pi^ny^3|_K^s\,|dx\,dy|$$

y

$$S_{n+1}(t)=\int_{(\pi\mathcal{O}_K)^2}|(x^2-\pi^ny^3)(\pi^{2n}x^5-y^3)|_K^s\,|dx\,dy|$$

así la idea es poder obtener recurrencias para $A_n(t)$ y $B_n(t)$, para después tratar de sumar

$$\sum_{n=1}^{\infty}A_n(t)\qquad\text{y}\qquad\sum_{n=1}^{\infty}B_n(t)$$

luego como este ejemplo muestra todavía no nos libramos de mostrar que una serie de potencias es una función racional.

Calculemos primero los $A_n(t)$, en primer lugar

$$A_1(t)=q^{-1}t^2(1)$$

y dos aplicaciones de **FFE** producen

$$A_4(t)=q^{-1}t^3(1)^2\big(1+q^{-1}t^3\big)+q^{-2}t^6A_1(t)$$

de la misma manera

$$A_7(t)=q^{-1}t^3(1)^2\big(1+q^{-1}t^3\big)+q^{-2}t^6A_4(t)$$

y en forma general

$$A_{3m+1}(t)=q^{-1}t^3(1)^2\big(1+q^{-1}t^3\big)+q^{-2}t^6A_{3(m-1)+1}(t)$$

luego para todo $m\geq 1$ se tiene que

$$A_{3m+1}(t)=q^{-1}t^3(1)^2\big(1+q^{-1}t^3\big)\sum_{i=0}^{m-1}\big(q^{-2}t^6\big)^i+\big(q^{-2}t^6\big)^mA_1(t)$$

de manera análoga

$$A_2(t)=q^{-1}t^3(1)\big((1)+q^{-1}t\big)$$

y dos aplicaciones de **FFE** producen

$$A_5(t) = q^{-1}t^3(1)^2\bigl(1 + q^{-1}t^3\bigr) + q^{-2}t^6 A_2(t)$$

y en forma general

$$A_{3m+2}(t) = q^{-1}t^3(1)^2\bigl(1 + q^{-1}t^3\bigr) + q^{-2}t^6 A_{3(m-1)+2}(t)$$

luego para todo $m \geq 1$ se tiene que

$$A_{3m+2}(t) = q^{-1}t^3(1)^2\bigl(1 + q^{-1}t^3\bigr)\sum_{i=0}^{m-1}\bigl(q^{-2}t^6\bigr)^i + \bigl(q^{-2}t^6\bigr)^m A_2(t)$$

y por ultimo

$$A_3(t) = q^{-1}t^3(1)^2 + q^{-2}t^6\Bigl(\nu(\mathcal{O}_K^\times \times \mathcal{O}_K, f_A) + \sigma(\mathcal{O}_K^\times \times \mathcal{O}_K, f_A)\frac{(1)}{(1,1)}t\Bigr)$$

donde $f_A = x^5 - y^3$, dos aplicaciones de **FFE** producen

$$A_6(t) = q^{-1}t^3(1)^2\bigl(1 + q^{-1}t^3\bigr) + q^{-2}t^6 A_3(t)$$

y en forma general

$$A_{3m+3}(t) = q^{-1}t^3(1)^2\bigl(1 + q^{-1}t^3\bigr) + q^{-2}t^6 A_{3(m-1)+3}(t)$$

luego para todo $m \geq 1$ se tiene que

$$A_{3m+3}(t) = q^{-1}t^3(1)^2\bigl(1 + q^{-1}t^3\bigr)\sum_{i=0}^{m-1}\bigl(q^{-2}t^6\bigr)^i + \bigl(q^{-2}t^6\bigr)^m A_3(t)$$

De la misma manera si

$$B_n(t) = \int_{\pi\mathcal{O}_K \times \mathcal{O}_K^\times} |x^2 - \pi^n y^3|$$

tenemos que $B_1(t) = q^{-1}t(1 - q^{-1})$, $B_2(t) = q^{-3}t^2\nu(\pi\mathcal{O}_K \times \mathcal{O}_K^\times, f_b)$, donde $f_b = x^2 - y^3$ con lo cual para todo $m \geq 0$

$$B_{2m+1}(t) = q^{-1}t^2(1 - q^{-1})^2\sum_{i=0}^{m-1}\bigl(q^{-1}t^2\bigr)^i + \bigl(q^{-1}t^2\bigr)^m B_1(t)$$

y

$$B_{2m+2}(t) = q^{-1}t^2(1 - q^{-1})^2\sum_{i=0}^{m-1}\bigl(q^{-1}t^2\bigr)^i + \bigl(q^{-1}t^2\bigr)^m B_2(t)$$

ahora como para todo $n \geq 1$

$$S_1(t) = (1-q^{-1})^2 \sum_{i=1}^{n} \big(q^{-2}t^5\big)^i + \sum_{i=1}^{n} \big(q^{-2}t^5\big)^i A_i(t)$$

$$+ \sum_{i=1}^{n} \big(q^{-2}t^5\big)^i B_i(t) + \big(q^{-2}t^5\big)^n S_{n+1}(t),$$

y como $Re(s) > 0$ entonces $|q^{-2}t^5| < 1$ y también $|S_{n+1}(t)| < 1$ entonces

$$S_1(t) = (1-q^{-1})^2 \sum_{i=1}^{\infty} \big(q^{-2}t^5\big)^i + \sum_{i=1}^{\infty} \big(q^{-2}t^5\big)^i A_i(t) + \sum_{i=1}^{\infty} \big(q^{-2}t^5\big)^i B_i(t)$$

ahora

$$\sum_{i=1}^{\infty} \big(q^{-2}t^5\big)^i A_i(t) = \sum_{i=0}^{\infty} \big(q^{-2}t^5\big)^{3i+1} A_{3i+1}(t) + \sum_{i=0}^{\infty} \big(q^{-2}t^5\big)^{3i+2} A_{3i+2}(t)$$

$$+ \sum_{i=0}^{\infty} \big(q^{-2}t^5\big)^{3i+3} A_{3i+3}(t)$$

y por las recurrencias que hemos obtenido tenemos

$$\sum_{i=1}^{\infty} \big(q^{-2}t^5\big)^i A_i(t) = \frac{q^{-9}t^{23}(1-q^{-1})^2(1-q^{-1}t^3)}{(1-q^{-2}t^5)(1-q^{-8}t^{21})}$$
$$+ \frac{q^{-2}t^5}{1-q^{-8}t^{21}} \Big(A_1(t) + q^{-2}t^5 A_2(t) + q^{-4}t^{10} A_3(t)\Big)$$

de manera completamente análoga obtenemos en el caso de $B_n(t)$

$$\sum_{i=1}^{\infty} \big(q^{-2}t^5\big)^i B_i(t) = \frac{q^{-7}t^{17}(1-q^{-1})^2}{(1-q^{-2}t^5)(1-q^{-5}t^{12})}$$
$$+ \frac{q^{-2}t^5}{1-q^{-5}t^{12}} \Big(B_1(t) + q^{-2}t^5 B_2(t)\Big)$$

con lo cual podemos ya dar el resultado final

$$\begin{aligned}
\int_{\mathcal{O}_K^2} |(x^2-y^3)(x^5-y^3)|_K^s\,|dx\,dy| &= \nu_0 + \sigma_0 \frac{(1-q^{-1})t}{(1-q^{-1}t)} \\
&+ \big(|S|-1\big) q^{-2}t^2 \frac{(1-q^{-1})^2}{(1-q^{-1}t)^2} \\
\frac{(1-q^{-1})^2 q^{-2}t^5}{1-q^{-2}t^5} &+ \frac{q^{-9}t^{23}(1-q^{-1})^2(1+q^{-1}t^3)}{(1-q^{-2}t^5)(1-q^{-8}t^{21})} \\
&+ \frac{q^{-7}t^{17}(1-q^{-1})^2}{(1-q^{-2}t^5)(1-q^{-5}t^{12})} \\
&+ \frac{q^{-2}t^5}{1-q^{-8}t^{21}}\Big(A_1(t) + q^{-2}t^5 A_2(t) + q^{-4}t^{10} A_3(t)\Big) \\
&+ \frac{q^{-2}t^5}{1-q^{-5}t^{12}}\Big(B_1(t) + q^{-2}t^5 B_2(t)\Big).
\end{aligned}$$

$\square$

Bibliografía

[A] E. Acosta, *El método de la fase estacionaria*, Lecturas Matemáticas **7** (1986), 61–77.

[A-C] V.S. Albis & R.A. Chaparro, *On a conjecture of Borevich and Shafarevich*, Rev. Acad. Colomb. Cienc. **21** (1997), 313–319.

[A-Z] V.S. Albis & W.A. Zúñiga-Galindo, *Una introducción elemental a la teoría de las funciones zeta locales de Igusa*, Lecturas Matemáticas **20** (1999), 5–33.

[At] M.F. Atiyah, *Resolution of singularities and division of distributions*, Comm. pure Appl. Math. **23** (1970), 145–150.

[B] I.N. Bernstein, *The analytic continuation of generalized functions with respect to a parameter*, Funct. Anal. Appl. **6** (1972), 273–285. their Igusa's local zeta

[B-S] Z.I. Borevich & I.R. Shafarevich, *Number Theory*, Academic Press, New York, 1966.

[C-F] J. Cassels & A. Fröhlich, *Algebraic Number Theory*, Academic Press, London, 1967.

[D1] J. Denef, *The rationality of the Poincaré series associated to the p-adic points on a variety*, Invent. Math. **77** (1984), 1–23.

[D2] J. Denef, *Report on Igusa's local zeta function*, Séminaire N. Bourbaki, 43ème année (1990–1991), exposé **741**; Astérisque **201–203** (1991), 359–386.

[D-H] J. Denef & K. Hoornaert, *Newton polyhedra and Igusa's local zeta function*, J. Number Theory **89** (2001), 31–64.

[F-G-R] R. Field, V. Gargeya & M. Robinson, *The Igusa local zeta function for $x^m + y^n$*, preprint 1994, disponible en [Rb]

[G] J. Goldman, *Numbers of solutions of congruences: Poincaré series for strongly nondegenerate forms*, Proc. Amer. Math. Soc. **87** (1983), 586–590.

[Gs] L.J. Goldstein, *Analytic Number Theory*, Prentice-Hall, Englewood Cliffs, 1971.

[G-K] S. Gray & K. Karlof, *SPF of diagonal polynomials products*, preprint 1997, disponible en [Rb] function for Fermat hypersurface with exponent

[H] K. Hoornaert, *Newton polyhedra, unstable faces and the poles of Igusa's local zeta function*, Trans. Amer. Math. Soc. **356** (2004), 1751–1779.

[Hs] H. Hosokawa, *Igusa local zeta function of the quadratic form $x_1^2 + \ldots + x_n^2$*, Yokohama Math. J. **46** (1999), 181–189.

[I1] J.-I. Igusa, *Complex powers and asymptotic expansions I*, J. reine angew. Math. **268/269** (1974), 110–130; *II*, ibídem **278/279** (1975), 307–321.

[I2] J.-I. Igusa, *Lectures on Forms of Higher Degree*, Tata Inst. Fund. Research, Springer-Verlag, Bombay, 1978.

[I3] J.-I. Igusa, *On the arithmetic of a singular invariant*, Amer. J. Math. **110** (1988), 197–233.

[I4] J.-I. Igusa, *A stationary phase formula for p-adic integrals and its applications*, Algebraic Geometry and its Applications (Conf. in honor of S.S. Abhyankar), Springer-Verlag, New York, 1994, 175–194. function of the cubic polynomial [Rb]

[M-R] D. Meuser & M. Robinson, *The Igusa local zeta function of elliptic curves*, Math. Comp. **71** (2002), 815–823.

[N] L. Nachbin, *The Haar Integral*, D. Van Nostrand, Princeton, 1965. abéliennes sur les corps locaux et

[R] S.-S. Roan, *On branching indices of affine A-D-E diagrams: a geometrical characterization by kleinian singularities*, arXiv:math.AG/0405580 v2 6jun2004.

[Rb] M. Robinson, *Mount Holyoke summer mathematics institute, Number theory research experience.* `http://www.mtholyoke.edu/~robinson/`

[S-Z] M.J. Saia & W.A. Zúñiga-Galindo, *Local zeta function for curves, non degeneracy conditions and Newton polygons*, por aparecer en Trans. Amer. Math. Soc. (2004). disponible en `http://euclid.barry.edu/~zuniga/`

[S1] J.-P. Serre, *Corps Locaux*, Actualités Sci. Ind. 1296, Hermann, Paris, 1962.

[S2] J.-P. Serre, *Méthodes adéliques*, Résumé des cours de 1981–1982, Annuaire du Collège de France (1982), 81–89.

[W] J. Wang, *On the Poincaré series for diagonal forms*, Proc. Amer. Math. Soc. **116** (1992), 607–611.

[We1] A. Weil, *Sur la formule de Siegel dans la théorie des groupes classiques*, Acta Math. **113** (1965), 1–87.

[We2] A. Weil, *Basic Number Theory*, Springer-Verlag, New York, 1967.

[Ws] E. Weiss, *Algebraic Number Theory*, McGraw-Hill, New York, 1963.

[Z-G1] W.A. Zúñiga-Galindo, *Igusa's local zeta functions of semiquasihomogeneous polynomials*, Trans. Amer. Math. Soc. **353** (2001), 3193–3207.

[Z-G2] W.A. Zúñiga-Galindo, *Local zeta functions and Newton polyhedra*, Nagoya Math. J. **172** (2003), 31–58.

[Z-G3] W.A. Zúñiga-Galindo, *Igusa's local zeta functions of univariate polynomials, and linear feedback shift registers*, J. Integer Sequences **6** (2003), artículo 03.3.6 disponible en
`http://www.cs.uwaterloo.ca/journals/JIS/`

[Z-G4] W.A. Zúñiga-Galindo, *On the poles of Igusa's local zeta function for algebraic sets*, Bull. London Math. Soc. **36** (2004), 310–320. integrals and Newton

[Z-G6] W.A. Zúñiga-Galindo, *Pseudo-differential equations connected with p-adic forms and local zeta functions*, Bull. Austral. Math. Soc. **70** (2004), 73–86.

[Z-G7] W.A. Zúñiga-Galindo, *Local zeta function for non-degenerate homogeneous mappings*, por aparecer en Pacific J. Math. (2004).