

1851

13.ª

120

Cuaderno de cálculo Diferencial.

Leciones dictadas

Por

Don Benigno, Compende de Leciones

Año de 1851. Bogota. de Sixto Y. Baroja.

Leccion I^a.

Calculo diferencial

[folio 1, verso, pág. 1]

Variable. Llamase variable una cantidad que puede tomar valores sucesivos diferentes, i *constante* la que guarda un valor fijo i determinado. [Definición de variable]

De las funciones en jeneral

Cuando los valores sucesivos de una *variable* dependen segun una cierta lei de los que toma otra variable, la primera se llama funcion de la segunda.

[Definición de función]

Se puede asegurar que dos cantidades que varian juntas son funciones la una de la otra, cuando se sabe que a cada valor de la una corresponde un valor determinado de la otra aunque no se conozca i no exista relacion algebraica entre ellas.

Se llama *variable independiente* aquella á quien se atribuyen valores arbitrarios i funcion la que toma valores correspondientes. v. g. El area de un circulo es funcion de su radio.

[Definición de variable independiente]

Una cantidad puede ser funcion de diversas variables independientes. v. g. El volumen de un cilindro recto de base circular es funcion del radio de la base i de la altura.

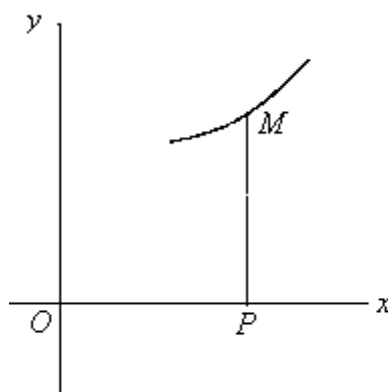
Representacion jeometrica de las funciones de una sola variable

Se acostumbra designar las variables por las ultimas letras del alfabeto i las constantes por las primeras.

[Notación de funciones y su representación gráfica]

Las notaciones $f(x)$, $F(x)$, $\varphi(x)$, ... representan funciones de x sin especificar su naturaleza.

$f(x, y)$, $F(x, y, z)$, $f(x, y, z)$ designan funciones de las variables. Sea $y = f(x)$. Se puede tomando sobre un plano dos ejes coordenados considerar á x como una abscisa variable i á y como la ordenada correspondiente de una curva plana cuya ecuacion sería $y = f(x)$.



[folio 1, anverso, pág. 2]
[Funciones continuas]

De ordinario si la curva es continua; es decir que x variando por grados insensibles, y varia tambien de este modo, y es entonces funcion continua de x .

[Funciones explícitas]

Una superficie puede ser representada por una funcion de 2 variables.

Llamase *Explicita* la funcion que se espresa inmediatamente por medio de sus variables siendo indicadas con precision las operaciones que se deben hacer sobre la variable ó sobre las variables cuando hay una o varias.

$$y = x + \sqrt{a^2 - z^2}, y = a^z \text{ son funciones explicitas de } x \text{ i de } z.$$

$$y = x^2 + az - x^z, y = \sqrt{x^2 - az} \text{ son funciones explicitas de } x \text{ i de } z.$$

[Funciones implícitas]

Se llaman *Implicitas* las funciones que estan unidas con las variables por medio de ecuaciones no resueltas, ó por relaciones desconocidas, por ejemplo la funcion y en la ecuacion $y^2 - 2xy + 2x^2 - a^2 = 0$.

[Límite de una variable]

Cuando los valores sucesivos de una variable se acercan indefinidamente á una cantidad fija i determinada, de manera que su diferencia con ella sea mui pequeña, dicha cantidad fija es el limite de la variable. v. g. La superficie de un circulo es el limite hacia el cual se acercan las areas de una serie de poligonos regulares inscritos al circulo cuyo numero de lados aumenta continuamente.

Si se compara un arco con su seno, la razón $\frac{\text{sen } x}{x}$ siempre menor [Límite de
que la unidad se acerca tanto mas de 1 como x es menor i se puede $\frac{\text{sen } x}{x}$ cuando
poner $L\left(\frac{\text{sen } x}{x}\right) = 1$. $x \rightarrow 0$]

Puede suceder que una cantidad variable al acercarse a su limite se
vuelva alternativamente mayor o menor que dicho limite. v.g. $\frac{\text{sen } x}{x}$
suponiendo que x aumenta indefinidamente. Se acerca a *cero*, se tiene
 $\frac{\text{sen } x}{x} < \frac{1}{x}$ i para que se tenga $\frac{1}{x} < \varepsilon$, basta que $x > \frac{1}{\varepsilon}$, siendo ε
una cantidad tan pequeña como se quiera determinarla; luego $\frac{\text{sen } x}{x}$
tiene por limite *cero*. En el mismo tiempo todas las veces que x
creciendo, se vuelve igual a un multiplice de la circunferencia se tiene
sen $x = 0$ y la razón $\frac{\text{sen } x}{x}$ pasa por *cero* cambiando de signo.

Si dos cantidades que varian simultaneamente son constantemente [folio 2, verso, pág. 3]
iguales entre si en todos sus estados de magnitud, i si se sabe que la [Igualdad de límites]
una se acerca a su limite, es claro que la otra tendrá el mismo ó uno
igual.

Sean a, p, r el area, el perimetro, i el apotema de un poligono regular
inscrito en un circulo, se tiene $a = p \times \frac{1}{2}r$; pero a i $p \times \frac{1}{2}r$ son cantidades
que varian con el numero de los lados del poligono regular quedando
siempre iguales entre sí. Si A, C, R son la superficie, la circunferencia
i el radio del circulo, como A es el limite de a C el de c i R el de r se
tendrá $A = C \times \frac{1}{2}R$.

Cuando una cantidad variable toma valores que disminuyen sucesi- [Infinitésimos]
vamente i se acerca a 0, se dice que se vuelve infinitamente pequeña.
La diferencia entre el area de un circulo, i la de un poligono regular
inscrito puede hacerse infinitamente pequeña aumentando el numero
de los lados. La funcion $\frac{x+5}{x^3+x^4}$ se vuelve infinitamente pequeña si x
crece hasta el infinito.

Se llama cantidad *infinitamente pequeña*, una cantidad esencial- [Definición de
mente variable que se acerca a *cero*. Cauchy]

Una cantidad puede creciendo siempre pasar por toda magnitud [Infinitos]
dada, entonces se la llama *infinitamente grande*, se expresa por las

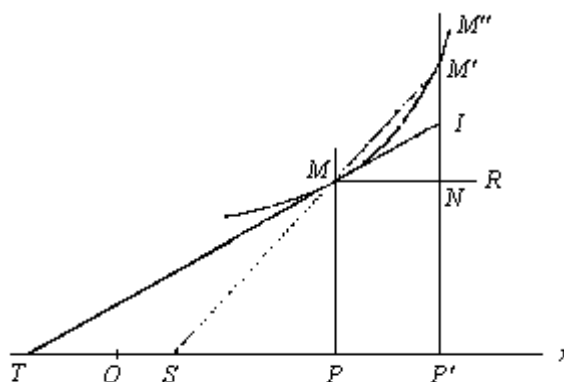
notaciones ∞ ó por $\frac{M}{0}$. El infinito puede ser positivo o negativo. v.g.

$y = \alpha + \frac{a^2}{x - a}$ si x aumenta hasta acer igual α , y aumenta desde cero hasta el infinito.

Oriegen del calculo diferencial

[Tangentes a una curva plana]

El calculo diferencial debe su origen á la investigacion de un procedimiento jeneral para conducir tangentes á las curvas planas.



Sea la curva $y = f(x)$, $MM'M''$, referida á ejes rectangulares i supongamos que se quiera tener la tangente MT al punto $M(x, y)$. Cambiemos x en $(x + h)$, y se vuelve $y + k$. Se tendrá otro punto de la curva $M'(x + h, y + k)$, tal que $y + k = f(x + h)$.

[folio 2, anverso, pág. 4]

Figuremonos que el punto M' se mueva sobre la curva acercandose indefinidamente á M , la secante MM' se acercará á confundirse con la tangente MT al punto M . Se tendrá

$$\tanj MM'N = \tanj S = \frac{M'N}{MN} = \frac{k}{h} .$$

Acercandose de *cero*, $\tanj IMR = \tanj T = \text{Lim} \left(\frac{k}{h} \right)$. Luego si se consideran los aumentos simultaneos h , i k de las variables x , y tales que $k = f(x + h) - f(x)$ i si se busca el limite hacia el cual se acerca la razon

$\frac{k}{h}$ de estos aumentos cuando h disminuye infinitamente, este limite sera la tangente. trigonometrica del ángulo T que la tangente en M hace con el eje de las x .

Objeto del calculo diferencial

El objeto del calculo diferencial es determinar para cada funcion el limite de la razon del aumento de la funcion al de la variable, cuando este ultimo disminuye hasta *cero*. [Definición de derivada]

Este limite que depende unicamente del valor arbitrario de x se llama derivada de la funcion propuesta, i se designa por y' ó $f'(x)$.

Consideremos algunos ejemplos.

[I.] $y = x^m$ siendo m entero i positivo, aumentando x resulta un aumento para y . [Ejemplos de derivación]

$$y + k = (x + h)^m = x^m + m \cdot hx^{m-1} + \frac{m(m-1)}{1 \cdot 2} h^2 x^{m-2} + \frac{m(m-1)(m-2)}{1 \cdot 2 \cdot 3} h^3 x^{m-3} + \dots + h^m,$$

restando y tendremos

$$k = (x + h)^m - x^m = m \cdot x^{m-1} h + \frac{m(m-1)}{1 \cdot 2} x^{m-2} h^2 + \frac{m(m-1)(m-2)}{1 \cdot 2 \cdot 3} x^{m-3} h^3 + \dots + h^m,$$

dividiendo por h resulta

$$\frac{k}{h} = mx^{m-1} + \frac{m(m-1)}{1 \cdot 2} x^{m-2} h + \frac{m(m-1)(m-2)}{1 \cdot 2 \cdot 3} x^{m-3} h^2 + \dots + h^{m-1}.$$

Se puede hacer h tan pequeña como se quiera, para que la reunion de todos los terminos con esepcion del primero sea menor que toda cantidad dada, luego se podrán despreciar estos terminos i se tendrá

$$\text{Lim} \left(\frac{h}{k} \right) = mx^{m-1}.$$

Luego la función derivada de $y = x^m$ es $y' = mx^{m-1}$.

[folio 3, verso,
pág. 5]

Se puede sin el auxilio del binomio de Newton llegar al mismo resultado.

Sea $x + h = X$, $h = X - x$. Elevemos esta ecuación a la potencia m y designemos h^m por k i tendremos

$$k = X^m - x^m, \quad \frac{k}{h} = \frac{X^m - x^m}{h} = \frac{X^m - x^m}{X - x}$$

$$\frac{X^m - x^m}{X - x} = X^{m-1} + X^{m-2}x + X^{m-3}x^2 + \dots + x^{m-1}$$

Si h se acerca a 0, X se acerca a x i cada término del 2° miembro será senciblemente igual a x^{m-1} y como hai m términos será mx^{m-1} .

$$\text{Lim} \left(\frac{k}{h} \right) = mx^{m-1}. \text{ Q.L.D.D.}$$

[II.] Sea una función entera $y = ax^m + bx^n + cx^p + \dots$.

Cambiando x en $(x + h)$, y se vuelve $(y + k)$

$$(y + k) = a(x + h)^m + b(x + h)^n + c(x + h)^p + \dots$$

restando y

$$k = a[(x + h)^m - x^m] + b[(x + h)^n - x^n] + c[(x + h)^p - x^p] + \dots$$

$$k = (max^{m-1} + nbx^{n-1} + px^{p-1} + \dots) h$$

$$+ \left(\frac{m(m-1)}{1 \cdot 2} ax^{m-2} + \frac{n(n-1)}{1 \cdot 2} bx^{n-2} + \frac{p(p-1)}{1 \cdot 2} cx^{p-2} \right) h^2 + \dots$$

$$\text{Lim} \left(\frac{k}{h} \right) = max^{m-1} + nbx^{n-1} + pcx^{p-1} + \dots$$

[III.] Sea $y = \frac{1}{x^m}$, $y + k = \frac{1}{(x + h)^m}$, $k = \frac{1}{(x + h)^m} - \frac{1}{x^m}$ reduciendo

el entero &^a.

$$\begin{aligned} \frac{x^m - (x+h)^m}{x^m(x+h)^m} &= \frac{x^m - x^m - mx^{m-1}h - \frac{m(m-1)}{1 \cdot 2}x^{m-2}h^2 - \dots}{x^m(x+h)^m} \\ &= \frac{-mx^{m-1} - \frac{m(m-1)}{1 \cdot 2}x^{m-2}h^2 - \dots}{x^m(x+h)^m} \end{aligned}$$

$$\frac{k}{h} = \frac{-mx^{m-1} - \frac{m(m-1)}{1 \cdot 2}x^{m-2}h^2 - \dots}{x^m(x+h)^m},$$

$$\text{Lim} \left(\frac{k}{h} \right) = \frac{-mx^{m-1}}{x^{2m}} = -\frac{m}{x^{m+1}}$$

[IV.] Sea $y = \sqrt{x^2 - a^2}$, $y + k = \sqrt{(x+h)^2 - a^2}$,

$$k = \sqrt{(x+h)^2 - a^2} - \sqrt{x^2 - a^2}.$$

$$\frac{k}{h} = \frac{\sqrt{(x+h)^2 - a^2} - \sqrt{x^2 - a^2}}{h};$$

$$\frac{k}{h} = \frac{\left(\sqrt{(x+h)^2 - a^2} - \sqrt{x^2 - a^2} \right) \left(\sqrt{(x+h)^2 - a^2} + \sqrt{x^2 - a^2} \right)}{h \left(\sqrt{(x+h)^2 - a^2} + \sqrt{x^2 - a^2} \right)}$$

pero la suma de las raices multiplicada por su diferencia dá la diferencia

de los cuadrados:

$$\begin{aligned} \frac{k}{h} &= \frac{(x+h)^2 - a^2 - x^2 + a^2}{h \left(\sqrt{(x+h)^2 - a^2} + \sqrt{x^2 - a^2} \right)} \\ &= \frac{x^2 + 2xh + h^2 - a^2 - x^2 + a^2}{h \left(\sqrt{(x+h)^2 - a^2} + \sqrt{x^2 - a^2} \right)} \\ &= \frac{2xh + h^2}{h \left(\sqrt{(x+h)^2 - a^2} + \sqrt{x^2 - a^2} \right)} \\ &= \frac{2x + h}{\sqrt{(x+h)^2 - a^2} + \sqrt{x^2 - a^2}}; \end{aligned}$$

[folio 3, anverso, pág. 6] al limite por ser h una cantidad mui pequeña [se] anula i queda

$$\begin{aligned} \frac{k}{h} &= \frac{2x + h}{\sqrt{(x+h)^2 - a^2} + \sqrt{x^2 - a^2}} \\ &= \frac{2x + h}{\sqrt{x^2 + 2xh + h^2 - a^2} + \sqrt{x^2 - a^2}} \end{aligned}$$

verificando lo que dijimos anteriormente resulta

$$\text{Lim} \left(\frac{k}{h} \right) = \frac{2x}{\sqrt{x^2 - a^2} + \sqrt{x^2 - a^2}} = \frac{2x}{2\sqrt{x^2 - a^2}} = \frac{x}{\sqrt{x^2 - a^2}}.$$

[Diferenciales]

Sea $y = f(x)$, se tiene dando a x un valor positivo ó negativo, $y+k = f(x+h)$ el limite de $\frac{k}{h}$ es y' ; luego $\text{Lim} \left(\frac{k}{h} \right) = y' + \alpha$, α es función de x i de h que se acerca a 0 i se vuelve nula con h . $k = y'h + \alpha \cdot h$. El aumento k de la función y se compone de dos partes distintas, la primera $y'h$ es el producto de el aumento de la variable independiente por la derivada de la función, llamasela su diferencial designandola por *dif.* $dy = y'h$.

La diferencial de la variable independiente no es sino su aumento arbitrario porque si se pone $y = x$, resulta $y + k = x + h$ i $k = h$.

$\frac{k}{h} = 1$, $\left(\frac{k}{h}\right) = y' = 1$, $dy = dx = 1 + h = h$; luego $dx = h$ i generalmente $dy = y'dx$, $y' = \frac{dy}{dx}$.

Se puede decir que la derivada de una función es igual al cociente de la diferencial de la función dividida por la de la variable. La derivada se llama tambien *razon diferencial* ó coeficiente diferencial. $F^a(1^a)$ Se tiene $\tan T = y'$, $PP' = MN = h$, $IN = yh = dy$, dx i dy son los aumentos correspondientes de x i de y , cuando se pasa del punto de contacto situado sobre la curva, á un punto cualquiera T de la tangente. Para un aumento $h = dx$, k es el aumento correspondiente MN de la variable de la curva. Sin embargo aunque IN i $M'N'$ sean muy diferentes, puede sér que el aumento sea imaginario, y la diferencial real. v. g. $y = (x - 1)\sqrt{x} + \sqrt{(x - 1)^3}$.

Si $x = 1$, $y = 0$, si $x = 1 + h$, siendo h positiva

$y + k = h\sqrt{1+h} + h\sqrt{-h}$ i como $y = 0$, $k = h\sqrt{1+h} + h\sqrt{-h}$ imaginario. $\lim \left(\frac{k}{h}\right) = y' = 1$; luego $dy = h$ por $x = 1$. Siendo el uno k la diferencia, i el otro dy la diferencial de la ordenada, su razon se acerca sin cesar á la unidad, por que el valor de la derivada no es nulo. En efecto, como $k = y'h + \alpha h$, se tiene: $\frac{k}{y'h} = \frac{y'h + \alpha h}{y'h} = 1 + \frac{\alpha}{y'}$ i como $\frac{\alpha}{y'}$ se acerca sin cesar á 0 en el mismo tiempo que h i $\frac{k}{dy}$ se acercan á la unidad.

Leccion II

[folio 4, verso, pág. 7]

Determinacion del sentido en que varia una funcion segun el signo de la derivada [Incrementos finitos]

Se tiene la relacion $k = (y' + \alpha)h$.

Supongamos que se dé á x un aumento h . Si y' es positivo, se podrá hacer h i por consiguiente α bastante pequeños para que el signo de $y' + \alpha$ sea el mismo que el de y' , luego positivo. k será tambien positivo i si y' fuera negativo k tendría el mismo signo. Se ve pues que para un aumento pequeño de x la funcion crece ó decrece segun que su derivada sea positiva ó negativa por el valor que se há dado á x .

Si haciendo crecer x desde un cierto valor a hasta otro b de una manera continua la derivada queda constantemente positiva o negativa sin volverse infinita, la funcion crece o decrece continuamente en el mismo intervalo. La misma concecuencia existe cuando la funcion se anula por un valor c de la variable comprendida entre a i b .

Reciprocamente si x aumentando constantemente entre ciertos limites a i b la funcion esta continuamente aumentando ó disminuyendo en este intervalo la derivada es constantemente positiva ó negativa para todos los valores de x comprendidos entre a i b ; pero puede volverse nula o infinita sin cambiar su signo, porque si cambiase su signo la funcion seria ya creciente lo que no puede ser segun se ha establecido.

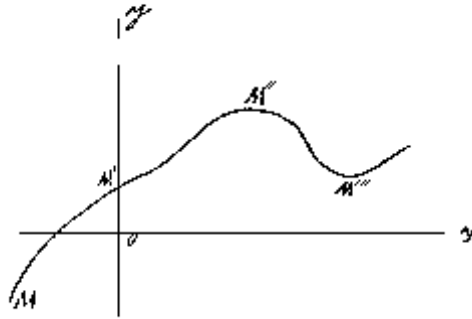
Aplicacion a la funcion $y = \frac{1}{3}x^3 - 2x^2 + 3x + 1$ i a la curva que reprecenta

Sea la funcion $y = \frac{1}{3}x^3 - 2x^2 + 3x + 1$, de donde $y' = x^2 - 4x + 3 = (x - 1)(x - 3)$: y' es nul por $x = 1$ i $x = 3$.

Si se hace crecer x desde $-\infty$ hasta $+1$, y' es siempre positivo, y crece desde $-\infty$ hasta $2 + \frac{1}{3}$ [;] $x = 1$ hasta $x = 3$ [,] y' es constantemente negativa é y crece desde $2 + \frac{1}{3}$ hasta 1.

Desde $x = 3$ hasta $x = \infty$, y' es constantemente positiva é y crece desde *uno* hasta el infinito.

[folio 4, anverso, pág. 8] La ecuacion $y = \frac{1}{3}x^3 - 2x^2 + 3x + 1$ esta representada por la curva $MM'M''M'''$.



Las coordenadas de M son $x = -1$, $y = \frac{-4}{3}$.

Las coordenadas de M' son $x = 0$, $y = 1$.

Las coordenadas de M'' son $x = 1$, $y = 2 + \frac{1}{3}$.

Las coordenadas de M''' son $x = 3$, $y = 1$.

La ordenada es maximun en M'' , i minimun M''' porque es creciente desde $-\infty$ hasta M'' , decreciente desde M'' hasta M''' , despues creciente hasta el infinito.

La curva no puede encontrar el eje de las x sino en un punto comprendido entre 0 i -1 .

[Proposición]

Una funcion cuya derivada es nula para todos los valores de x correspondientes entre 2 limites a i b es una cantidad constante en el mismo intervalo y reciprocamente.

[Demostración]

Esta proposicion se deduce de $k = (y' + \alpha)h$.

En efecto: por todo valor de x comprendido entre a i b se tiene:

$$\text{Lim}\left(\frac{k}{h}\right) = y' = 0.$$

Si se toma una cantidad determinada ε tan pequeña como se quiera se tendrá por el valor absoluto de $\frac{k}{h} < \varepsilon$, siendo h mui pequeña de donde $k < h\varepsilon$.

Sean x_1 i x_2 dos valores cualesquiera de x comprendidos entre a i b . Demos á x valores crecientes por grados iguales o desiguales, pero tan pequeños que en el intervalo de x_1 á x_2 se tenga siempre $k < \varepsilon h$.

Luego la suma de los aumentos sucesivos de y tomados positivamente, será menor que la suma de los productos εh , ó menor que ε multiplicado por la suma de los aumentos de x , i con mayor razon será así para la suma de los aumentos de y tomados con sus signos, lo que se podrá expresar por $y_2 - y_1 < \varepsilon(x_2 - x_1)$. Siendo $y_2 - y_1$ menor que toda cantidad dada, debe ser nula i se tiene $y_2 = y_1$, y constante.

Caso en que la derivada es constantemente infinita. En este caso se tiene: $\text{Lim}\left(\frac{k}{h}\right) = \infty$, luego $\text{Lim}\left(\frac{k}{h}\right) = 0$, luego x debe ser constante ó lo que es lo mismo sus aumentos son nulos.

Los aumentos simultaneos de las variables i de las funciones se representarán por Δ .¹

[folio 5, verso, pág. 9]

Dos cantidades que no difieren sino por una constante tienen la misma derivada i la misma diferencial, i reciprocamente. [Proposición]

Si las funciones tienen una diferencial constante llegaremos a la misma conclusion. Sea $u = v + c$, $u + \Delta u = v + \Delta v + c$ i restando se queda $\Delta u = v + \Delta v + c - v + c = \Delta v$ therefore $\Delta u = \Delta v$ i $\frac{\Delta u}{\Delta x} = \frac{\Delta v}{\Delta x}$ [Demostración]
i tomando los limites $\frac{du}{dx} = \frac{dv}{dx}$.

Supongamos las dos derivadas iguales $\frac{du}{dx} = \frac{dv}{dx}$. Sea $y = u - v + c$,

¹[Proposición] Si dos funciones son iguales para todos los valores de las variables, lo mismo será para sus derivadas. [Demostración]. Sean u i v dos funciones de x , $u = v$, demos a x un valor arbitrario Δx i se tendrá $u + \Delta u = v + \Delta v$ restemos de u , $\Delta u = v + \Delta v - v$ ó $\Delta u = \Delta v$ ó $\frac{\Delta u}{\Delta x} = \frac{\Delta v}{\Delta x}$. $\frac{\Delta u}{\Delta x} = \frac{\Delta v}{\Delta x}$ i $\frac{du}{dx} = \frac{dv}{dx}$ ó $du = dv$.

$$y + \Delta y = u + \Delta u - v - \Delta v + c, \text{ ó } \Delta y = \Delta u - \Delta v,$$

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{\Delta u}{\Delta x} - \frac{\Delta v}{\Delta x}$$

$$\text{Lim} \left(\frac{\Delta y}{\Delta x} \right) = \frac{dy}{dx} = \frac{du}{dx} - \frac{dv}{dx} = 0 .$$

Vamos a tratar de la diferenciacion de funcion de funciones

Sea $u = \varphi(y)$, $y = f(x)$. Se tiene la identidad $\frac{\Delta u}{\Delta x} = \frac{\Delta u}{\Delta y} \cdot \frac{\Delta y}{\Delta x}$ i al limite $\frac{du}{dx} = \frac{du}{dy} \cdot \frac{dy}{dx}$, ó $\frac{du}{dx} = \varphi'(y) \cdot f'(x)$, de donde $du = \varphi'(y)f'(x)dx$, ó $du = \varphi'(y)dy$ á causa de ser $dy = f'(x)dx$.

La relacion $\frac{du}{dx} = \frac{du}{dy} \cdot \frac{dy}{dx}$ indica que la derivada de la funcion de funcion, es igual al producto de las derivadas de la primera considerada como si y fuera variable independiente.

Hay que notar que en $\frac{du}{dy}$, dy es el aumento de y considerada como independiente, i en $\frac{dy}{dx}$, dy es la diferencial de y considerada como funcion de x .

Ejemplo. $u = y^m$, $dy^m = my^{m-1}dx$, $y = \sqrt{x^2 - a^2}$, $y' = \frac{x}{\sqrt{x^2 - a^2}}$,
 $d(y)^m = m(\sqrt{x^2 - a^2})^{m-1} dx$.

[Si] $v = \psi(u)$, $u = \varphi(y)$, $y = f(x)$ [, entonces]

$$\frac{dv}{dx} = \psi'(u)\varphi'(y) \times f'(x)$$

ó

$$\frac{dv}{dx} = \frac{dv}{du} \cdot \frac{du}{dy} \cdot \frac{dy}{dx}$$

Diferenciacion de sumas i diferencias de funciones

Sea $y = u + v - z$, demos un aumento á ambos miembros

$$y + \Delta y = u + \Delta u + v + \Delta v - z - \Delta z;$$

$$\Delta y = u + \Delta u + v + \Delta v - z - \Delta z - u - v + z = \Delta u + \Delta v - \Delta z$$

dividiendo por Δx tendremos

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{\Delta u}{\Delta x} + \frac{\Delta v}{\Delta x} - \frac{\Delta z}{\Delta x}$$

i al limite

$$\frac{dy}{dx} = \frac{du}{dx} + \frac{dv}{dx} - \frac{dz}{dx}$$

i para tener la diferencial es preciso dividir [¿multiplicar?] por dx i queda

$$dy = du + dv - dz.$$

Sea $y = au$,

$$y + \Delta y = a(u + \Delta u) = au + a\Delta u$$

restando y , tenemos

$$\Delta y = au + a\Delta u - au = a\Delta u,$$

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = a \frac{\Delta u}{\Delta x};$$

al limite

$$\frac{dy}{dx} = a \frac{du}{dx},$$

ó tomando la diferencial

$$dy = a du .$$

Producto de dos funciones

[Sea] $y = uv$,

$$y + \Delta y = (u + \Delta u)(v + \Delta v) = uv + u\Delta v + v\Delta u + \Delta u\Delta v ;$$

$$\Delta y = uv + v\Delta u + u\Delta v + \Delta u\Delta v - uv$$

$$= v\Delta u + u\Delta v + \Delta u\Delta v ,$$

[dividiendo por Δx]

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = v \frac{\Delta v}{\Delta x} + u \frac{\Delta v}{\Delta x} + \Delta u \cdot \frac{\Delta v}{\Delta x},$$

i al limite

$$\frac{dy}{dx} = v \frac{dv}{dx} + u \frac{dv}{dx},$$

ó $dy = vdu + udv$.

Producto de 3 funciones

[Sea] $y = uvz$, $dy = d(uvz)$; consideremos este 2° miembro como el producto de u por vz i tendremos

$$du = d(uvz) = vzdu + ud(vz) = vzdu + uzdv + uvdz .$$

Producto de varias funciones

[Sea] $y = u \cdot v \cdot z \cdots t$.

$$dy = vz \cdots tdu + uz \cdots tdv + \cdots$$

La diferencial de un producto de un numero cualquiera de factores es igual a la suma que se obtiene de los productos de la diferencial de cada factor multiplicado por el producto de los demas factores.

Dividiendo ambos miembros por el producto de todos los factores

$$\frac{d(uvz \cdots t)}{uvz \cdots t} = \frac{du}{u} + \frac{dv}{v} + \cdots + \frac{dt}{t} .$$

Cociente de 2 funciones

Sea $y = \frac{u}{v}$, resulta $yv = u$ ó $vdy + ydv = du$, $vdy = du - \frac{u}{v}dv = \frac{vdu - udv}{v}$ tenemos $vdy = \frac{vdu - udv}{v}$, dividiendo por v , $dy = \frac{vdu - udv}{v^2}$; esto quiere decir que la diferencial de un quebrado es igual al denominador multiplicado por la diferencial del numerador, menos el numerador multiplicado por la diferencial del denominador [todo dividido por el cuadrado del denominador].

Vamos há demostrar esta proposicion directamente[;] si $y = \frac{u}{v}$,

$$y + \Delta y = \frac{u + \Delta u}{v + \Delta v},$$

$$\Delta y = \frac{u + \Delta u}{v + \Delta v} - \frac{u}{v} = \frac{v\Delta u - u\Delta v}{v(v + \Delta v)},$$

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{v \frac{\Delta u}{\Delta x} - u \frac{\Delta v}{\Delta x}}{v(v + \Delta v)},$$

i al limite

$$\frac{dy}{dx} = \frac{v \frac{du}{dx} - u \frac{dv}{dx}}{v^2};$$

dividiendo [¿multiplicando?] por dx ,

$$dy = \frac{vdu - u dv}{v^2} = d\left(\frac{u}{v}\right).$$

Q.L.D.D

Potencia de una funcion $y = u^m$

[folio 6, verso,
pág. 11]

Se sabe que

$$d(uvz \cdots t) = (vz \cdots t)du + (uz \cdots t)dv + \cdots + (uvz \cdots)dt.$$

Suponiendo que todos los factores se vuelven iguales siendo el [su] numero m se tendrá, $d(u^m) = mu^{m-1}du$, siendo m entero.

Operando directamente siendo u funcion de x :

$$y + \Delta y = (u + \Delta u)^m$$

sea $u + \Delta u = v$ sustituyendo se tendrá $y + \Delta y = v^m$ restando y , $\Delta y = v^m - u^m$. Dividiendo el 2º miembro de esta ecuacion por $v - u$, se tiene

$$\Delta y = (v - u)(v^{m-1} + v^{m-2}u + \cdots + u^{m-1})$$

dividiendo por Δx

$$\begin{aligned}\frac{\Delta y}{\Delta x} &= \frac{(v-u)(v^{m-1} + v^{m-2}u + \dots + u^{m-1})}{(v^{m-1} + v^{m-2}u + \dots + u^{m-1})\Delta u} \\ &= \frac{\Delta x}{\Delta x}\end{aligned}$$

de donde

$$\frac{dv}{dx} = mu^{m-1} \frac{du}{dx}$$

(al limite $u = v$ i como hai m [...] se tiene de la ecuación acabada de sacar

$$dy = mu^{m-1} du = du^m .$$

Exponente fraccionario $y = u^{p/q}$

Elevando a esta ecuacion á q queda $y^q = u^p$. [Luego]

$$qy^{q-1}dy = pu^{p-1}du$$

multiplicando ambos miembros por y ó su valor $u^{p/q}$,

$$qy^q dy = pu^{\frac{p}{q}+p-1} du$$

dividiendo por y^q [...]

$$qdy = pu^{\frac{p}{q}-1} du$$

$$dy = \frac{p}{q} u^{\frac{p}{q}-1} du .$$

fraccionaria

Sea $y = u^{-n} = \frac{1}{u^n}$ tomemos la diferencial $dy = -\frac{nu^{n-1}}{u^{2n}} = -nu^{n-1} du$.

Caso de $y = u^{1/n}$ $dy = du^{1/n} = \frac{1}{n} du^{\frac{1}{n}-1} du$ $n = 2$ $dy = d\sqrt{u} = du^{1/2} du \frac{du}{2\sqrt{u}}$ [...] operando directamente $y + \Delta y = \sqrt{u + \Delta u}$ $\Delta y = \sqrt{u + \Delta u} - \sqrt{u}$ $\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{\sqrt{u + \Delta u} - \sqrt{u}}{\Delta x}$ multiplicando por la [...] $\sqrt{u + \Delta u} - \sqrt{u}$

\sqrt{u} tenemos que la suma de las raíces multiplicadas por su diferencia da la diferencia de los cuadrados

$$\begin{aligned} \frac{(\sqrt{u + \Delta u} - \sqrt{u})(\sqrt{u + \Delta u} + \sqrt{u})}{\Delta x(\sqrt{u + \Delta u} + \sqrt{u})} &= \frac{u + \Delta u - u}{\Delta x(\sqrt{u + \Delta u} + \sqrt{u})} \\ &= \frac{\Delta u}{\Delta x(\sqrt{u + \Delta u} + \sqrt{u})} \end{aligned}$$

i al limite

$$\frac{dy}{dx} = \frac{du}{dx}$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{du}{dx(\sqrt{u} + \sqrt{u})} = \frac{du}{dx} \frac{1}{2\sqrt{u}}$$

$$dy = \frac{du}{2\sqrt{u}}$$

Q.L.D.D.

De las expresiones imajinarias

Las raíces algebraicas resultan del calculo algebraico i se reducen como se sabe á la forma $u + v\sqrt{-1}$. [...] $\sqrt{-1}$ como un factor constante:

$$y = u + v\sqrt{-1}, y + \Delta y = u + \Delta u + (v + \Delta v)\sqrt{-1}$$

[de donde]

$$\begin{aligned} \Delta y &= u + \Delta u + (v + \Delta v)\sqrt{-1} - u - v\sqrt{-1} \\ &= \Delta u + \Delta v\sqrt{-1} \end{aligned}$$

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{\Delta u}{\Delta x} + \frac{\Delta v}{\Delta x}\sqrt{-1},$$

i al limite

$$\frac{dy}{dx} = \frac{du}{dx} + \frac{dv}{dx}\sqrt{-1}$$

y la diferencial

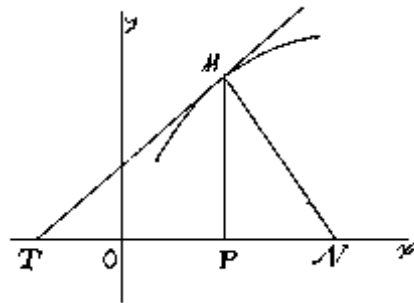
$$dy = du + dv\sqrt{-1}.$$

Leccion III^a

[folio 6, anverso, pág. 13]

Leccion de Analisis

Aplicación del cálculo á la determinación de curvas [Incrementos finitos] que tienen ciertas propiedades



Ocupemonos de una curva tal que la subnormal en cada punto sea constante. Se tiene

$$NP = MP, \text{ tanj } PMN = MP, \text{ tanj } MTx$$

pero $MP = y$ i $\text{Tan } PMN = \text{Tan } MTN = \frac{dy}{dx}$, luego $NP = y \frac{dy}{dx}$ este es el valor de la subnormal i como es constante la podemos designar por a i tenemos $y \frac{dy}{dx} = a$, $ydy = adx$ ó $2ydy = 2adx$; pero $2ydy = dy^2$ i $2adx = d(2ax)$, de donde $dy^2 = d2ax$; al limite $y^2 = 2ax + C$: ecuación que reprecenta en coordenadas rectangulares todas las parábolas del mismo parámetro i del mismo eje.

Subnormal potencia de la [...] absisa

Consideremos la curva que debe ser tal [...] su subnormal sea potencia cualquiera de la absisa, se tendrá $y \frac{dy}{dx} = x^m$ de donde $x^m dx = y dy$ ó $2y dy = 2x^m dx$, $y^2 = \frac{2}{m+1} x^{m+1} + c$

La subtanjente proporcional a la inversa de la ordenada

En el triángulo TMO tenemos $TP = PM$; como $PMP = y$ [...] = $\frac{1}{\tan j MTO} = [\dots]$, de donde [...] ó [...]: esta ecuación representa una hipérbola [...] cualquiera que tiene al eje de las x por asíntota i también una parábola cualquiera al eje de las y .

[...] constante. Se tendrá en el triángulo rectángulo MPN , $\overline{MN}^2 = \overline{PM}^2 + \overline{PN}^2$ i como tenemos la [...] segundo miembro [...] por k^2 , tendremos

$$y^2 + y^2 \frac{dy^2}{dx^2} = k^2$$

$$y^2 \frac{dy^2}{dx^2} = k^2 - y^2$$

therefore $y \frac{dy}{dx} = \sqrt{k^2 - y^2}$ ó $y dy = \sqrt{k^2 - y^2} dx$, de donde

$$dy = \frac{y dy}{\sqrt{k^2 - y^2}} ;$$

pero

$$d(\sqrt{k^2 - y^2}) = -\frac{2y dy}{2\sqrt{k^2 - y^2}} = -\frac{y dy}{\sqrt{k^2 - y^2}},$$

$$dx = \frac{dy}{\frac{y dy}{\sqrt{k^2 - y^2}}}$$

ó $x - c = -\sqrt{k^2 - y^2}$ ó $(x - c)^2 = k^2 - y^2$ ó $(x - c)^2 + y^2 = k^2$. La curva es un círculo de radio igual a la constante k , i cuyo centro se halla en un punto cualquiera del eje de las x .

Funciones compuestas de muchas funciones de la variable independiente x .

Función de dos funciones $y = f(u, v)$

Se puede hacer variar primero u y después v . Tendremos por el aumento correspondiente

$$f(u + \Delta u, v) - f(u, v) ;$$

tomemos el límite de la razón del aumento de y á este aumento de u :

$$\frac{f(u + \Delta u, v) - f(u, v)}{\Delta u} = \varphi(u, v) = \frac{df(u, v)}{du}.$$

Si se hace aumentar v se tendrá también

$$f(u, v + \Delta v) - f(u, v) = \psi(u, v) = \frac{df(u, v)}{dv} ;$$

$$\frac{f(u, v + \Delta v) - f(u, v)}{\Delta v} = \psi(u, v) = \frac{df(u, v)}{dv}.$$

Supongamos que α i β sean funciones que se vuelven nulas cuando Δx se vuelve nula, se tendrá:

$$f(u + \Delta u, v) - f(u, v) = [\varphi(u, v) + \alpha] \Delta u$$

$$f(u, v + \Delta v) - f(u, v) = [\psi(u, v) + \beta] \Delta v .$$

Cambiamos en la 2ª relación u por $u + \Delta u$ i suponiendo que sea β' el resultado de β después de esta sustitución:

$$f(u + \Delta u, v + \Delta v) - f(u + \Delta u, v) = [\psi(u + \Delta u, v) + \beta'] \Delta v .$$

Sumando esta tercera con la primera, resulta dividiendo por Δx ,

$$\frac{f(u + \Delta u, v + \Delta v) - f(u, v)}{\Delta x} =$$

$$= \left[\varphi(u, v) + \alpha \left[\frac{\Delta u}{\Delta x} + [\psi(u + \Delta u, v) + \beta'] \frac{\Delta v}{\Delta x} \right] \right]$$

Pasando al límite

$$\frac{dy}{dx} = \varphi(u, v) \frac{du}{dx} + \psi(u, v) \frac{dv}{dx} ;$$

$$dy = \varphi(u, v) du + \psi(u, v) dv ,$$

ó lo que es lo mismo

$$dy = \frac{dy}{du} du + \frac{dy}{dv} dv;$$

en $\frac{dy}{du}$ i $\frac{dy}{dv}$, u i v deben ser considerados como variabñes independien-
tes i en du i dv estas cantidades deben ser consideradas como funciones
de x .

Funciones de 3 variables. Sea $y = f(u, v, z)$,

$$\Delta y = f(u + \Delta u, v + \Delta v, z + \Delta z) - f(u, v, z).$$

Se pondrá

$$f(u + \Delta u, v, z) - f(u, v, z) = [\varphi(u, v, z) + \alpha] \Delta u \quad (1)$$

$$f(u + \Delta u, v + \Delta v, z) - f(u, v, z) = [\psi(u, v, z) + \beta] \Delta v \quad (2)$$

$$f(u, v, z + \Delta z) - f(u, v, z) = [\chi(u, v, z) + \gamma] \Delta z \quad (3)$$

Si en (2) se dá un aumento á u i á v , resultará

$$f(u + \Delta u, v + \Delta v, z) - f(u + \Delta u, v, z) = [\psi(u + \Delta u, v, z) + \beta'] \Delta v . \quad (4)$$

[folio 7, anverso, pág. 15] Si en (3) se dá un aumento á u i á v ,

$$\begin{aligned} f(u + \Delta u, v + \Delta v, z + \Delta z) - f(u + \Delta u + \Delta u, v, z) = \\ = [\chi(u + \Delta u, v + \Delta v, z) + \gamma'] \Delta z . \end{aligned} \quad (5)$$

Sumemos (1), (4) i (5):

$$\begin{aligned} f(u + \Delta u, v, z) - f(u, v, z) + f(u + \Delta u, v + \Delta v, z) - f(u + \Delta u, v, z) \\ + f(u + \Delta u, v + \Delta v, z + \Delta z) - f(u + \Delta u, v + \Delta v, z) \end{aligned}$$

i haciendo la simplificación resulta

$$\begin{aligned} f(u + \Delta u, v + \Delta v, z + \Delta z) - f(u, v, z) = \\ = [\varphi(u, v, z) + \alpha] \Delta u + [\psi(u + \Delta u, v, z) + \beta'] \Delta v + \\ + [\chi(u + \Delta u, v + \Delta v, z) + \gamma'] \Delta z ; \end{aligned}$$

dividiendo por Δx resulta

$$\begin{aligned} \frac{f(u + \Delta u, v + \Delta v, z + \Delta z) - f(u, v, z)}{\Delta x} &= \\ &= [\varphi(u, v, z) + \alpha] \frac{\Delta u}{\Delta x} + [\psi(u + \Delta u, v, z) + \beta'] \frac{\Delta v}{\Delta x} + \\ &\quad + [\chi(u + \Delta u, v + \Delta v, z) + \gamma'] \frac{\Delta z}{\Delta x}; \end{aligned}$$

ó tomando los limites

$$\frac{dy}{dx} = \varphi(u, v, z) \frac{du}{dx} + \psi(u, v, z) \frac{dv}{dx} + \chi(u, v, z) \frac{dz}{dx};$$

el primer miembro de esta última ecuacion vale del modo que sigue. La ecuación de donde partimos fue $y = f(u, v, z)$; demos un aumento $y + \Delta y = f(u + \Delta u, v + \Delta v, z + \Delta z)$, restando de y , $\Delta y = f(u + \Delta u, v + \Delta v, z + \Delta z) - f(u, v, z)$,

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(u + \Delta u, v + \Delta v, z + \Delta z) - f(u, v, z)}{\Delta x}$$

i al limite

$$\frac{dy}{dx} = [\text{Lim}] \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(u + \Delta u, v + \Delta v, z + \Delta z) - f(u, v, z)}{\Delta x}$$

en el segundo miembro al limite [...] α, β, γ i lo mismo los aumentos $\Delta u, \Delta v, \Delta z$, Q.L.D.D.

$$dy = \varphi(u, v, z)du + \psi(u, v, z)dv + \chi(u, v, x)dz$$

pero

$$\varphi(u, v, z) = \frac{dy}{dx}, \quad \psi(u, v, z) = \frac{dy}{dv}, \quad \chi(u, v, z) = \frac{dy}{dz}$$

luego

$$dy = \frac{dy}{du} du + \frac{dy}{dv} dv + \frac{dy}{dz} dz .$$

Para tener la diferencial de un número cualquiera de funciones de la variable independiente, tomense las diferenciales respecto á cada una de las funciones como si fueran independientes, i sumense los resultados.

De las series

Se llama *serie* [...] de términos varios: $u_1, u_2, u_3, \dots, u_n$ [...] formada según cierta lei.

Sea

$$S_n = u_1 + u_2 + u_3 + \dots + u_n$$

que representa un orden cualquiera la suma de un número determinado de términos.

Serie convergente. La serie será convergente si S_n se acerca indefinidamente á un límite S , cuando n aumenta. $S - S_n$ es el residuo de la serie: $R_n = S - S_n$, de donde $S = S_n + R_n$

[folio 8, verso, pág. 16]

Serie divergente. La serie será divergente cuando S_n no se acerca a un límite fijo cuando n aumenta.

La progresión geométrica

$$Doteq a : ak^1 : ak^2 : ak^3 : ak^4 : \dots : ak^{n-1} ,$$

es convergente cuando k es menor que 1, puesto que

$$S_n = \frac{a(1 - k^n)}{1 - k} = \frac{a}{1 - k} - \frac{ak^n}{1 - k} .$$

El límite $S = \frac{a}{1 - k}$, porque tomando n muy grande $\frac{ak^n}{1 - k}$ es muy pequeño. Si $k > 1$ no hay límite, ni tampoco cuando $k = 1$. Cuando una serie es convergente es preciso que los términos vayan siempre decreciendo, y si puedan volverse menores que una cantidad cualquiera dada. Se tiene en efecto $S_n = S - R_n$.

R_n debe volverse sumamente pequeña, y eso no puede suceder á menos que todos los elementos de R_n vayan decreciendo volviéndose por n infinitamente pequeños: esta condición es necesaria, pero no basta, como por ejemplo en la serie

$$S = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \dots + \frac{1}{n} + \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \frac{1}{n+3} + \dots + \frac{1}{2n} + \dots$$

Se hallará en esta serie un término menor que toda cantidad dada con tal que $\frac{1}{n}$ siendo este término se tenga $n > \frac{1}{\epsilon}$.

Se puede demostrar sea cual fuere el término que [...] la suma de los términos que se desprecian es siempre mayor que toda cantidad dada. En efecto:

$$\frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \frac{1}{n+3} + \cdots + \frac{1}{2n} > \left(\frac{1}{2n} + \frac{1}{2n} + \cdots \right) = \left(\frac{1}{2n} \right) n = \frac{1}{2}$$

i pongase la serie bajo la forma:

$$1 + \frac{1}{2} + \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{4} \right) + \left(\frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \frac{1}{7} + \frac{1}{8} \right) + \\ + \left(\frac{1}{9} + \frac{1}{10} + \cdots + \frac{1}{16} \right) + \left(\frac{1}{17} + \cdots + \frac{1}{32} \right) + \cdots$$

Cada porcion entre paréntesis es mayor que un $\frac{1}{2}$, i como tras un numero infinito de fracciones, la serie tiene una fraccion infinita. La condicion necesaria i suficiente para que una serie sea converjente es necesario que la suma de un numero cualquiera de terminos sobre un termino de cierto orden n sea menor que todo lo que se quiera, siendo n infinitamente grande.

Caracteres particulares de converjencia. Consideremos primero una serie de quien todos los términos, ó partiendo [por lo menos] desde un cierto orden en adelante lejano sean positivos. [folio 8, anverso, pág. 17]

Para la converjencia bastará que desde un cierto término la razon de un termino cualquiera al precedente sea menor que una fraccion k .

Sea $u_{n+1} < k u_n$, $u_{n+2} < k^2 u_n$, $u_{n+3} < k^3 u_n$, \cdots , $u_{n+i} < k^i u_n$, de donde

$$u_{n+1} + u_{n+2} + u_{n+3} + \cdots + u_{n+i} < u_n (k + k^2 + k^3 + \cdots + k^i) \\ = u_n \frac{k - k^{i+1}}{1 - k}.$$

$\frac{k - k^{i+1}}{1 - k}$ puede volverse menor que todo lo que se quiera, puesto que $k < 1$. R_k puede tambien ser mui pequeño luego sera [...]por $u_{n+1} +$

$u_{n+2} + u_{n+3} + \dots + u_{n+i}$ luego la serie será convergente. Si k fuese > 1 resultaría

$$u_{n+1} + u_{n+2} + u_{n+3} + \dots + u_{n+i} > u_n (k + k^2 + k^3 + \dots + k^i) ,$$

el segundo miembro puede volverse mayor que una cualquiera; luego la serie será divergente. La misma conclusión resultaría si $k = 1$. Si después de un cierto término se tiene constantemente raíz n -ésima de $u_n < k < 1$ habrá convergencia porque resulta

$$u_{n+1} + u_{n+2} + \dots < k^{n+1} + k^{n+2} + \dots$$

La serie será divergente si después de un cierto término se tiene raíz n -ésima de $a_n > K > 1$, porque de esta desigualdad resulta [...], luego mayor que cualquier cantidad dada por n suficientemente grande. Consideremos una serie cuyos términos sean los unos positivos y [los otros] negativos. Si una serie de esta especie es convergente tomando positivamente todos sus términos después de [...] de ellas con mayor razón la primera serie será convergente [i] esta condición de convergencia basta; pero no es necesaria.

[Criterio de Leibniz]

Teorema Una serie es convergente cuando todos los términos son alternativamente positivos i negativos, i tienen valores constantemente decrecientes partiendo de un cierto término inclusive.

[Demostración]

Sea S_r la suma de la serie..., S_n la suma de todos los términos hasta u_{n+1} , φ_i [??] $u_{n+1}, u_{n+2}, u_{n+3}, \dots$ los valores atribuidos de u_{n+1}, u_{n+2}, \dots . Se tendrá $S_r = S_n + (u_{n+1} - u_{n+2}) + (u_{n+3} - u_{n+4}) + \dots$ de donde $S_r \geq S_n$. Se tiene también $S_r = S_n + u_{n+1} - (u_{n+2} - u_{n+3}) - (u_{n+4} - u_{n+5}) + \dots$; i $S_r < S_n + u_{n+1}$, luego $S_n < S_r < S_n + u_{n+1}$; pero como S_r está comprendida entre S_n i $S_n + u_{n+1}$, como u_{n+1} puede volverse tan pequeña como se quiera, la serie es convergente.

Ejemplos de series convergentes

$1 + x + \frac{x^2}{1 \cdot 2} + \frac{x^3}{1 \cdot 2 \cdot 3} + \dots + \frac{x^n}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \dots \cdot n}$. Esta serie es convergente para $x < 1$, porque $u_{n+1} = \frac{x^{n+1}}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \dots \cdot (n+1)}$; $u_n = \frac{x^n}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \dots \cdot n}$; $\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{x}{n+1}$ i se puede tomar n bastante grande para que $\frac{x}{n+1}$ sea menor que toda cantidad dada, sea positiva i [...]

Termino maximo por un valor dado a x

Sea $i < x < i + 1$. Se tiene $x^i = \frac{x}{1} \cdot \frac{x}{2} \cdot \frac{x}{3} \cdots \frac{x}{i}$. Todos los factores son mayores que 0 y los que siguen formando mas serían menores. Supongamos que [...] $\frac{x^{n-1}}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdots (n-1)}$ [...] un limite superior al residuo R_n se tendrá

$$R_n < \frac{x^n}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdots n} \left(\frac{x}{n+1} + \frac{x^2}{(n+1)(n+2)} + \cdots \right)$$

de donde:

$$R_n < \frac{x^n}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdots n} \left(\frac{x}{n+1} + \frac{x^2}{(n+1)^2} + \frac{x^2}{(n+1)^2} + \frac{x^3}{(n+1)^3} \cdots \right)$$

ó

$$R_n < \frac{x^n}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdots n} \left(\frac{x}{n+1} + \frac{x^2}{(n+1)^2} + \frac{x^2}{(n+1)^2} + \frac{x^3}{(n+1)^3} \cdots \right)$$

$$R_n < \frac{x^n}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdots n} \cdot \frac{x}{n+1-x}; \text{ ó } [\dots]$$

Sea la serie

$$1 + x \cos x + \frac{x^2}{1 \cdot 2} \cos 2x + \frac{x^3}{1 \cdot 2 \cdot 3} \cos 3x + \frac{x^4}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} \cos 4x + \cdots \\ + \frac{x^n}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdots n} \cos nx + \cdots$$

cuyos varios terminos son menores a [...] los de

$$\frac{x}{1} + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + \frac{x^4}{4} + \cdots + \frac{x^n}{n} + \cdots$$

sera converjente para $1 < x > 1$ [?], porque $u_{n+1} = \frac{x^{n+1}}{n+1}$, $u_{n+2} = \frac{x^{n+2}}{n+2}$; $\frac{u_{n+2}}{u_{n+1}} = \frac{x^{n+2}}{x^{n+1}} \cdot \frac{n+1}{n+2} < 1$.

(Fin de la leccion 3^a.)

Leccion IV^a.

[folio 1, verso,
pág. 1]

[xxxxxxx]

Leccion de analisis

Sea la serie converjente $\left[\frac{x}{1} + \frac{x^2}{1 \cdot 2} + \frac{x^3}{1 \cdot 2 \cdot 3} + \dots + \frac{x^n}{n} \left[\frac{x}{1} + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + \dots + \frac{x^n}{n} \right. \right.$ Sea R_n su residuo,

$$R_n = \frac{x^{n+1}}{n+1} + \frac{x^{n+2}}{n+2} + \dots < \frac{x^{n+1}}{n+1} (1 + x + x^2 + x^3 + \dots),$$

$R_n < \frac{x^{n+1}}{n+1} \cdot \frac{1}{1-x}$, limite superior. Sea

$$1 + mx + \frac{m(m-1)}{1 \cdot 2} x^2 + \dots + \frac{m(m-1) \dots (m-p+1)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \dots p} x^p + \dots$$

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{m-p+1}{p} x = \left(\frac{m+1}{p} - 1 \right) x.$$

$\frac{m-p+1}{p} x$ es menor que 1 cuando p es suficientemente grande para $x >$

0. Los terminos [??] a valores alternativamente positivos i negativos i a disminuir independientemente, i la serie es converjente.

Sea $x > 0$, i cuyo valor absoluto sea menor que 1 el valor absoluto de $\frac{u_{n+1}}{u_n}$ tiende hacer menor que una fracción muy pequeña k , i la serie es convergente.

Seria divergente para $x > 0$ [???] pero de valor absoluto > 1 , porque $\left(\frac{m+1}{p} - 1\right)$ tiende a [???] > 1 .

Sea la serie $\left(1 + \frac{1}{2^m} + \frac{1}{3^m} + \frac{1}{4^m} + \dots\right)$ para $m < 1$ sus terminos son respectivamente mayores que los terminos correspondientes a la serie

$$\left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \dots\right);$$

luego es divergente. Si $m > 0$ se tiene

$$u_p = \frac{1}{p^m}, \quad u_{p+1} = \frac{1}{p^{m+1}}, \quad \frac{u_{p+1}}{u_p} = \left(\frac{1}{p_{m+1}}\right)^m,$$

esta razon se acerca de la unidad tanto como se quiera.

Para satisfacer la converjencia de la serie en el caso $m > 1$ pongamos la serie bajo la forma siguiente:

$$1 + \left(\frac{1}{2^m} + \frac{1}{3^m}\right) + \left(\frac{1}{4^m} + \frac{1}{5^m} + \frac{1}{6^m} + \frac{1}{7^m}\right) + \dots + \left(\frac{1}{8^m} + \dots + \frac{1}{15^m}\right) + \dots$$

esta [???] es menor que $1 + \frac{2}{2^m} + \frac{4}{4^m} + \frac{8}{8^m} + \dots$ o que [???] $1 + \frac{2}{2^{m-1}} + \frac{4}{4^{m-1}} + \frac{8}{8^{m-1}} + \dots$ cuyo valor es $\frac{1}{1 - \frac{1}{2^{m-1}}}$.

Consideremos la serie $1 + 1 + \frac{x^2}{1 \cdot 2} + \frac{x^3}{1 \cdot 2 \cdot 3} + \dots$ si se hace $x = 1$ en esta serie se tendrá

$$1 + 1 + \frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{1 \cdot 2 \cdot 3} + \dots + \frac{x^2}{1 \cdot 2 \cdot \dots \cdot 3 \cdot \dots \cdot n} + \dots$$

$\frac{u_{p+1}}{u_p} = \frac{1}{p+1}$. La serie es mui convergente. Se designa dicha serie por la letra e i se tiene $e > 2$ i

$$e < 2 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 2 \cdot 2} + \dots$$

ó $e < 2 + 1$ ó 3 .

El residuo

$$R_n = \frac{1}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdots n(n+1)} + \frac{1}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdots n(n+1)(n+2)} + \cdots$$

se tendra

$$R_n < \frac{1}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdots n} \left(\frac{1}{n+1} + \frac{1}{(n+1)^2} + \frac{1}{(n+1)^3} + \cdots \right)$$

ó $R_n < \frac{1}{1 \cdot 2 \cdots n} \times \frac{1}{n}$ limite superior.

Consideremos el desenvolvimiento de $\left(1 + \frac{1}{m}\right)^m$:

$$\begin{aligned} \left(1 + \frac{1}{m}\right)^m &= 1 + m \frac{1}{m} + \frac{n(m-1)}{1 \cdot 2} \frac{1}{m^2} + \cdots + \\ &\quad + \frac{m(m-1) \cdots (m-n+1)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdots n} \frac{1}{m^n} + \cdots \\ &= 2 + \frac{1 - \frac{1}{m}}{1 \cdot 2} + \frac{\left(1 - \frac{1}{m}\right) \left(1 - \frac{2}{m}\right)}{1 \cdot 2 \cdot 3} + \cdots + \\ &\quad + \frac{\left(1 - \frac{1}{m}\right) \left(1 - \frac{2}{m}\right) \cdots \left(1 - \frac{n}{m}\right)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdots n} + \cdots \end{aligned}$$

Este desenvolvimiento tiende indefinidamente hacia e , en efecto

$$\begin{aligned} \left(1 + \frac{1}{m}\right)^m &> 2 + \frac{1 - \frac{1}{m}}{1 \cdot 2} + \frac{\left(1 - \frac{1}{m}\right) \left(1 - \frac{2}{m}\right)}{1 \cdot 2 \cdot 3} + \cdots + \\ &\quad + \frac{\left(1 - \frac{1}{m}\right) \left(1 - \frac{2}{m}\right) \cdots \left(1 - \frac{n}{m}\right)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdots n} + \cdots \end{aligned}$$

i

$$e < 2 + \frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{1 \cdot 2 \cdot 3} + \cdots + \frac{1}{1 \cdot 2 \cdots n} + \frac{1}{1 \cdot 2 \cdots n} \times \frac{1}{n}$$

Se puede tomar el numero m tal que

$$\left(1 - \frac{1}{m}\right) \left(1 - \frac{2}{m}\right) \cdots \left(1 - \frac{n-1}{m}\right)$$

que es < 1 sea $> 1 - \epsilon$; ϵ es un numero determinado tan pequeño como se quiera.

Siendo este producto $> \left(1 - \frac{n-1}{m}\right)^{n-1}$ bastara poner $\left(1 - \frac{n-1}{m}\right)^{n-1} > 1 - \epsilon$, de donde $m > \frac{n-1}{1 - \sqrt[n-1]{(1-\epsilon)}}$.

$$\left(1 + \frac{1}{m}\right)^m > 2 + (1 - \epsilon) \left(\frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{1 \cdot 2 \cdot 3} + \cdots + \frac{1}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdots n}\right)$$

i tambien

$$\left(1 + \frac{1}{m}\right)^m > 2 + \left(\frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{1 \cdot 2 \cdot 3} + \cdots + \frac{1}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdots n}\right) - \epsilon$$

de donde

$$e - \left(1 + \frac{1}{m}\right)^m < \frac{1}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdots n} \times \frac{1}{m} + \epsilon$$

y como se puede suponer m tan grande como se quiera y ϵ tan pequeño como se quiera, se que el limite de $\left(1 + \frac{1}{m}\right)^m$ es e . Supongamos que m esté comprendido entre p i $p + 1$ se tendra

$$\left(1 + \frac{1}{m}\right)^m < \left(1 + \frac{1}{p}\right)^m < \left(1 + \frac{1}{m}\right)^{p+1}$$

ó

$$\left(1 + \frac{1}{m}\right)^m < \left(1 + \frac{1}{p}\right)^p \left(1 + \frac{1}{p}\right) .$$

$$\left(1 + \frac{1}{m}\right)^m > \left(1 + \frac{1}{p+1}\right)^p \left(1 + \frac{1}{p+1}\right) .$$

Estos 2 segundos miembros tienen por límite e , luego el primero [??] estará en el mismo caso.

Si se hace m negativo

$$\begin{aligned} \left(1 + \frac{1}{m}\right)^m &= \left(1 - \frac{1}{u}\right)^{-u} = \left(\frac{u}{u-1}\right)^u \\ &= \left(1 + \frac{1}{u-1}\right)^u = \left(1 + \frac{1}{u-1}\right)^{u-1} \left(1 + \frac{1}{u-1}\right). \end{aligned}$$

Es preciso demostrar que e es inconmensurable. En efecto si e fuera commensurable se tendría

$$\frac{a}{b} = 2 + \frac{1}{?} + \frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{1 \cdot 2 \cdots b} + \frac{1}{1 \cdot 2 \cdots b(b+1)} + \cdots$$

Haciendo parás al primer miembro todos los términos desde 2 hasta $\frac{1}{1 \cdot 2 \cdots b}$ inclusive, i multiplicando ambos miembros por $1 \cdot 2 \cdots b$; se tendrá

$$N = \frac{1}{b+1} + \frac{1}{(b+1)(b+2)} + \cdots < \frac{1}{b+1} + \frac{1}{(b+1)^2} + \cdots < \frac{1}{b}$$

ó número entero menor que $\frac{1}{b}$ lo que es un absurdo.

Diferenciación de las funciones trascendentes

Sea $y = L(x)$. En el sistema de base a se tiene $x = a^y$, $y + \Delta y = \text{Log}(x + \Delta x)$ de donde

$$\Delta y = \text{Log}(x + \Delta x) - \text{Log}(x) = \text{Log}\left(1 + \frac{\Delta x}{x}\right), \quad \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{\text{Log}\left(1 + \frac{\Delta x}{x}\right)}{\Delta x}$$

Sea $\Delta x = \frac{x}{m}$, $\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{m}{x} \text{Log}\left(1 + \frac{1}{m}\right)$, i al límite

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{x} \text{Log}e; \quad dy = d\text{Log} = \frac{dx}{x} \text{Log}e.$$

En el sistema neperiano $d\text{Log}x = \frac{dx}{x}$.

Para pasar de un sistema Neperiano a un sistema cualquiera i reciprocamente se tiene $x = a^y$. $Lx = yLa = \text{Log}x \log a$. Si se hace $x = e$ se tendria $1 = \text{Log}x \ell a$. De donde [??] $\text{Log}x = Lx \frac{1}{\ell a} = Lx \log e$.

El factor $\log e = 1/\ell a$ lleva el nombre de modulo del sistema cuando se quiere pasar del sistema Neperiano a este sistema.

Para $a = 10$, $\text{Log}e = \frac{1}{\ell a} = 0,4342945$ i pasar de las tablas ordinarias a los logaritmos Neperianos se multiplican los logaritmos de las tablas ordinarias por $\frac{1}{\text{Log}e}$ ó $L_{10} = 2,30225851$.

Aplicaciones

$y = a^m$, $L y = m \ell a$ [novale : $\frac{dy}{y} = \ell e$], $\frac{dy}{y} = m \frac{da}{a}$ ó $dy = \left(m \frac{da}{a}\right) y$,
 $dy = (mL y) a^m = m a^{m-1} da$.

$$y = uvz; y^2 = u^2 v^2 z^2$$

$y = uvz$, $L y = L u L v L z$ (porque el logaritmo de un producto es igual a la suma de los logaritmos de los factores).

$\frac{dy}{y} \ell e = \frac{du}{u} \ell e + \frac{dv}{v} \ell e + \frac{dz}{z} \ell e$ (porque el logaritmo de una cantidad es igual a la diferencial de las cantidades divididas por la cantidad misma y multiplicada por el logaritmo de la base (es decir por ℓe) suprimiendo $\log e$.)

$$\frac{dy}{y} = \frac{du}{u} + \frac{dv}{v} + \frac{dz}{z}, \quad y = a^u, \quad L y = u \ell a, \quad \frac{dy}{y} \ell e = u \frac{da}{a} \ell e,$$

$$dy = \left(u \frac{\ell a}{a}\right) a^u, \quad dy = a, \quad dy = u a^{m-1} du, \quad y = a^u,$$

$$L y = u L a, \quad \frac{dy}{y} = \frac{du}{u} L a.$$

Si $a = e$, $d(e^u) = a^u da$. Se tiene $a = L a$, $a^u = e^{u L a}$, $da^u = de^{u L a}$.

$$y = L(x + \sqrt{a^2 + x^2}), \quad dy = d(L[x + \sqrt{a^2 + x^2}])$$

$$\begin{aligned}
 d(\text{L}[x + \sqrt{a^2 + x^2}]) &= \frac{d[x + \sqrt{a^2 + x^2}]}{x + \sqrt{a^2 + x^2}} = \frac{dx + \frac{2xdx}{2\sqrt{a^2 + x^2}}}{x + \sqrt{a^2 + x^2}} \\
 &= \frac{dx + \frac{xdx}{\sqrt{a^2 + x^2}}}{x + \sqrt{a^2 + x^2}} = \frac{dx\sqrt{a^2 + x^2} + xdx}{x + \sqrt{a^2 + x^2}}
 \end{aligned}$$

extracta por [??]

$$\frac{dx \frac{\sqrt{a^2 + x^2} + x}{\sqrt{a^2 + x^2}}}{x + \sqrt{a^2 + x^2}} = \frac{dx}{\sqrt{a^2 + x^2}} .$$

$$\begin{aligned}
 y &= \text{L}\left(\frac{x}{\sqrt{a^2 + x^2}}\right), dy = d\text{L}\left(\frac{x}{\sqrt{a^2 + x^2}}\right) = \frac{d\left(\frac{x}{\sqrt{a^2 + x^2}}\right)}{\frac{x}{\sqrt{a^2 + x^2}}} \\
 &= \frac{\frac{dx[\sqrt{a^2 + x^2}] - \frac{x \cdot xdx}{\sqrt{a^2 + x^2}}}{a^2 + x^2}}{\frac{x}{\sqrt{a^2 + x^2}}} = \frac{\frac{dx[\sqrt{a^2 + x^2}]\sqrt{a^2 + x^2} - x^2 dx}{\sqrt{a^2 + x^2}}}{\frac{x}{\sqrt{a^2 + x^2}}} \\
 &= \frac{dx}{x} - \frac{xdx}{a^2 + x^2} = \frac{a^2 dx}{a^2 + x^2} .
 \end{aligned}$$

$$y = L[(x - a)^m(x - b)^n(c - c)^p] = mL(x - a) + nL(x - b) + pL(x - c)$$

$$dy = \frac{mdx}{x - a} + \frac{ndx}{x - b} + \frac{pdx}{x - c}$$

$$dL[(x - a)^m(x - b)^n(x - c)^p \cdots] = \left[\frac{m}{x - a} + \frac{n}{x - b} + \frac{p}{x - c} + \cdots \right] dx$$

$$f(x) = (x - a)^m(x - b)^n(x - c)^p \cdots \quad \text{para } m, n, p, \text{ enteros}$$

$$\frac{dL f(x)}{dx} = \frac{f'(x)}{f(x)} = \left[\frac{m}{x - a} + \frac{n}{x - b} + \frac{p}{x - c} + \cdots \right]$$

$$d(Lx)^m = mLx)^{m-1}dx/x, \quad d(LLx) = dLx/Lx = dx/xLx.$$

$$y = v^u, L y = uL v, dL y = d(uL v) = duL v + u dv/v;$$

$$dy/y = duL v + u dv/v.$$

$$dy = y duL v + y/v(u dv); dy = v^u L v du + v^{u-1} u dv.$$

Se puede obtener sin la consideracion de los logaritmos,

$$df(uv) = df/du du + df/dv dv.$$

$$d(a^v) = v^u L v du + uv^{u-1} dv$$

$$da^{bx} = a^{bx} L a dbx = a^{bx} L a L b b^x dx$$

$y = \text{sen } x$, $y + \Delta y = \text{sen}(x + \Delta x)$, $\delta y = \text{sen}(x + \Delta x) - \text{sen } x$, pero segun una fórmula de trigonometria $\text{sen}(x + \Delta x) - \text{sen } x = 2\text{sen} \frac{1}{2}\Delta x \cdot \cos(x + \frac{1}{2}\Delta x)$, luego $\Delta y = 2\text{sen} \frac{1}{2}\Delta x \cdot \cos(x + \frac{1}{2}\Delta x)$.

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{\text{sen} \frac{1}{2}\Delta x}{\frac{1}{2}\Delta x} \cdot \cos(x + \frac{1}{2}\Delta x), \quad \text{al limite} \quad \frac{\text{sen} \frac{1}{2}\Delta x}{\frac{1}{2}\Delta x} = 1;$$

efectuando la multiplicacion del parentesis resulta $\cos x + \cos \frac{1}{2}\Delta x$ pero $\cos \frac{1}{2}\Delta x$ al limite se anula i queda $\cos x$ i tendremos $dy/dx = \cos x dx$, en lugar de y pongamos su valor $d \operatorname{sen} x = \cos x dx$ esto quiere decir que la diferencial del seno de una cantidad es igual a la diferencial de la cantidad multiplicada por el coseno de la misma

$$\begin{aligned}\cos x &= \operatorname{sen} \left(\frac{\pi}{2} - x \right), \\ d \cos x &= d \operatorname{sen} \left(\frac{\pi}{2} - x \right) = \cos \left(\frac{\pi}{2} - x \right) d \left(\frac{\pi}{2} - x \right) = -\operatorname{sen} x dx\end{aligned}$$

luego $d \cos x = -\operatorname{sen} x dx$, esto quiere decir que la diferencial del coseno es igual a menos el seno de la cantidad multiplicado por la diferencial de la cantidad. $\operatorname{Tan} x = \operatorname{sen} x / \cos x$; efectuando la diferencial del quebrado

$$d \operatorname{Tan} x = \frac{\cos x d \operatorname{sen} x - \operatorname{sen} x d \cos x}{\cos^2 x}$$

[???] sus valores acabados de sacar [???].

$$\begin{aligned}d \operatorname{Tan} x &= \frac{\cos x \cos x dx + \operatorname{sen} x \operatorname{sen} x dx}{\cos^2 x} \\ &= \frac{\cos^2 x dx + \operatorname{sen}^2 x dx}{\cos^2 x} = \frac{dx(\cos^2 x + \operatorname{sen}^2 x)}{\cos^2 x}\end{aligned}$$

pero como se sabe $\cos^2 x + \operatorname{sen}^2 x = 1$, resulta $d \operatorname{Tan} x = dx / \cos^2 x$ esto quiere decir que la diferencial de la tangente es igual a la diferencial de la cantidad dividida por \cos^2 de la misma cantidad.

$$\cot x = \cos x / \operatorname{sen} x$$

$$\begin{aligned}d \cot x &= \frac{\operatorname{sen} x d \cos x - \cos x d \operatorname{sen} x}{\operatorname{sen}^2 x} = \frac{-\operatorname{sen} x \operatorname{sen} x dx - \cos x \operatorname{sen} x dx}{\operatorname{sen}^2 x} \\ &= -\frac{(\operatorname{sen}^2 x dx + \cos^2 x dx)}{\operatorname{sen}^2 x} = -\frac{dx(\operatorname{sen}^2 x + \cos^2 x)}{\operatorname{sen}^2 x}\end{aligned}$$

pero $\operatorname{sen}^2 x + \cos^2 x = 1$; luego $d \cot x = -dx / \operatorname{sen}^2 x$; esto quiere decir que la diferencial de la cot[angente] es igual a menos la diferencial de la cantidad dividida por sen^2 de la misma cantidad.

La tang. aumenta siempre con el arco, y la cotangente disminuye.

$$\sec x = \frac{1}{\cos x} ; \quad d \sec x = d \left(\frac{1}{\cos x} \right) ; \quad d \sec x = \frac{\operatorname{sen} x \, dx}{\cos^2 x} ;$$

[Ejemplos] $d \operatorname{sen}^m x = m \operatorname{sen}^{m-1} x \cos x \, dx$ $d \operatorname{sen}(ax + b) = a \cos x (ax + b) dx$. este ejemplo sale de este modo sea $ax + b = r$ i entonces tenemos $d \operatorname{sen} r = \cos r \, dr$, en lugar de r pongo su valor $d \operatorname{sen}(ax + b) = \cos(ax + b) \, adx$.

$$d \left(\frac{\operatorname{sen} x}{x} \right) = \frac{x \cos x \, dx - \operatorname{sen} x \, dx}{x^2} = \frac{(x \cos x - \operatorname{sen} x) dx}{x^2}$$

dividiendo y multiplicando por $\cos x$ resulta $\frac{\cos x(x - \operatorname{tang} x) dx}{x^2}$. Cuando x crece de 0 a $\frac{\pi}{2}$ la razon $\frac{\operatorname{sen} x}{x}$ disminuye continuamente.

$$d \left(\frac{\operatorname{tang} x}{x} \right) = \frac{(2x - \operatorname{sen}^2 2x) dx}{2x^2 - \cos^2 x} ;$$

$$y = e^{au^2 \operatorname{tang} \frac{u^2}{v^2+u^2}}$$

$$dy = e^{au^2 \operatorname{tang} \frac{u^2}{v^2+u^2}} d \, au^2 \operatorname{tang} \frac{u^2}{v^2+u^2}$$

$$d \left(au^2 + \operatorname{tang} \frac{u^2}{v^2+u^2} \right) = \operatorname{tang} \frac{u^2}{v^2+u^2} d(au^2) + au^2 \, d \operatorname{tang} \frac{u^2}{v^2+u^2}$$

$$= 2audu \operatorname{tang} \frac{u^2}{v^2+u^2} + au^2 \frac{d \left(\frac{u^2}{v^2+u^2} \right)}{\cos^2 \frac{u^2}{v^2+u^2}}$$

$$= 2audu \operatorname{tang} \frac{u^2}{v^2+u^2} + \frac{au^2(u^2+v^2)2udu - u^2(2udu+2udu)}{\cos^2 \left(\frac{u^2}{v^2+u^2} \right) (u^2+v^2)^2}$$

$$= 2a \left(udu \operatorname{tang} \frac{u^2}{v^2+u^2} + \frac{u^2 v(udu+vdv)}{\cos^2 \frac{u^2}{v^2+u^2} \cdot (u^2+v^2)^2} \right)$$

$$\begin{aligned}
 de^{au^2 \tan \frac{u^2}{u^2+v^2}} &= \\
 &= e^{au^2 \tan \frac{u^2}{u^2+v^2}} 2a \left(udu \tan \frac{u^2}{u^2+v^2} + \frac{u^2 v (udu + vdv)}{\cos^2 \frac{u^2}{u^2+v^2} \cdot (u^2+v^2)^2} \right)
 \end{aligned}$$

Fin de la lección 4ª.