

CLÁSICOS DE LA MATEMÁTICA COLOMBIANA

# Introducción elemental al cálculo de los cuaternios

por

**Pedro J. Sosa**

Anales de Ingeniería, 3 (1890), 253-258

Anales de Ingeniería, 4 (1890), 116-128

Anales de Ingeniería, 4 (1890), 150-159

Anales de Ingeniería, 4 (1891), 211-223

Anales de Ingeniería, 4 (1891), 246-255

Anales de Ingeniería, 4 (1891), 312-316

Anales de Ingeniería, 4 (1891), 335-340

Anales de Ingeniería, 4 (1891), 364-370

Anales de Ingeniería, 5 (1891), 3-11

## Prólogo

*Mathematics is the science which draws necessary conclusions*

BENJAMIN PEIRCE

III,(1890),  
pág. 253

En las matemáticas, consideradas sobre todo en su aspecto analítico, deben distinguirse, por una parte, las leyes que se refieren á las entidades que forman la materia de la ciencia y que constituyen las verdades matemáticas, y por la otra, el simbolismo empleado para expresar dichas leyes y deducir las consecuencias que de ellas se desprenden. Este simbolismo es el lenguaje de la ciencia, y las reglas y leyes que lo rigen forman su lógica. La certeza de los resultados á que él conduce se debe á la fijeza é invarialidad de las leyes combinatorias de sus elementos y á la interpretación, también constante, de sus formas simbólicas, tomadas con relación á las definiciones que le sirven de base. Las deducciones matemáticas son así las consecuencias de una lógica cuyos términos tienen valores convencionales, pero determinados y precisos; circunstancias que no siempre va unida al raciocinio expresado en lenguaje común y que da á las matemáticas su carácter de ciencia exacta.

Siendo pues el simbolismo matemático de origen convencional, se comprende que su desarrollo y perfeccionamiento hayan procedido por extensión y adaptación de reglas y formas anteriores, en vez de haber obedecido exclusivamente á una transformación evolutiva ó necesariamente incluida en la primera forma dada á esta parte de la ciencia.

Puede decirse que una de las causas que más han contribuido á cohibir el desarrollo del análisis matemático, y á introducir en él las restricciones y aun falsas interpretaciones con que ha solido aplicarse, ha sido precisamente la de haberse incurrido en conceptos contrarios á los que acabamos de expresar; esto es, la de no haberse reconocido el carácter esencialmente convencional de su simbolismo. De aquí el que la aritmética fuese considerada por largo tiempo como la única base legítima de las generalizaciones algébricas; de aquí también los errores doctrinales que prevalecieron acerca de las operaciones fundamentales, con relación á las cantidades llamadas negativas é imaginarias, que fueron el escollo de los algebristas y el desengaño de cuantos esperaban hallar en las matemáticas una continuidad lógica que no era compatible con tales concepciones.

III,(1890),  
pág. 254

Hasta época no muy lejana, en efecto, el Álgebra era considerada tan sólo como una especie de aritmética universal, cuyos símbolos no tenían otro objeto que el de generalizar los métodos y resultados, haciendo desaparecer las individua-

lidades numéricas; sus operaciones debían, por consiguiente, limitarse á aquellas que fuesen de un carácter estrictamente cuantitativo. Estas dos condiciones antagónicas, á saber, generalización simbólica por una parte y restricción operativa por la otra, tuvieron por consecuencia obligada conducir á operaciones y resultados que aritméticamente deben considerarse como imposibles ó absurdos. Tales son, por ejemplo, la operación  $a - (a + b)$  y su resultado  $-b$ ; porque si  $a$  y  $b$  representan números abstractos, la operación es imposible por ser el sustraendo mayor que el minuendo, y si la ejecutamos siguiendo el procedimiento rutinario indicado por la regla de los signos, el resultado  $-b$  carece de interpretación en aritmética, porque en esta ciencia los signos  $+$  y  $-$  representan operaciones que llevan en sí mismas la idea de pluralidad con respecto á los agentes sobre los cuales se opera, y es claro que dichas operaciones no pueden ejecutarse con relación á un sólo número. La operación simbolizada por la expresión anterior sólo será aritméticamente posible en tanto que  $b$  sea igual á cero, pero como esta limitación en el valor de  $b$  es contraria á la generalidad que se le quiso atribuir y según la cual debemos ver en él número abstracto cualquiera, resulta que lógicamente no podemos establecer la generalidad incondicional de dichos símbolos, sin extender á un mismo tiempo el concepto ó definición de la operación misma más allá de los límites que le asigna la aritmética.

Tal extensión de significado se obtiene representando por los signos  $+$  y  $-$  no solamente dos operaciones modificativas de la cantidad abstracta, sino también dos cualesquiera de las cualidades *opuestas* que afectan á las cantidades concretas que intervienen en el cálculo. Por este medio la influencia de los signos  $+$  y  $-$  se ejerce ya sea en el sentido de aumento ó disminución como en la Aritmética, ya sea en el de persistencia ó inversión con respecto á condiciones de existencia, arbitraria si se quiere, pero necesariamente opuestas y cuyos distintivos simbólicos son los signos mismos. De este doble oficio de los signos se derivan las reglas de la suma algébrica, cuya definición propia es distinta de las definiciones que corresponden á la adición y sustracción aritméticas, ser más general que éstas.

Las vicisitudes del símbolo  $\sqrt{-1}$  sugieren consideraciones análogas á las precedentes. En todo rigor este simbolo no tiene interpretación alguna ya sea en el sentido aritmético ya sea en el del Álgebra común, y al presentarse en los cálculos como resultado de consideraciones numéricas ó algébricas puras sólo designa, como se sabe, contradicción ó imposibilidad con respecto al enunciado del problema. Su empleo en el análisis algébrico queda, sin embargo, justificado al considerarlo como una unidad concreta representativa de operación en vez de cantidad

propiamente dicha; esta nueva concepción legítima la interpretación de ciertas expresiones en que él interviene sin necesidad de franquear, por decirlo así, la valla que separa lo real de lo imaginario.

III,(1890),  
pág. 255

Sabemos que los puntos de una recta prolongada indefinidamente á uno y otro lado de uno de sus puntos tomado por origen, pueden servir para representar geoméricamente todos los números posibles, inclusive los llamados por convención positivos y negativos; el símbolo  $\sqrt{-1}$  permite extender esta representación á una cualquiera de las rectas que, situadas en un mismo plano, pasan por el origen, esto es, á todos los puntos de un plano. Esta consideración revela por sí sola y á primera vista, la mayor generalidad introducida en el análisis algébrico con el libre empleo de este símbolo en cuestiones de índole geométrica. Si partimos pues de la representación geométrica de la cantidad, no tan sólo por los puntos de una recta sino también por los de un plano, el símbolo  $\sqrt{-1}$  reviste el carácter convencional que debe distinguirlo y puede considerársele como una extensión dada al concepto de cantidad; esta adquiere así en el álgebra moderna una acepción más alta que en el álgebra común.

El empleo que se hace de las cantidades negativas é imaginarias en el cálculo no debe aceptarse, por tanto, como una consecuencia obligada de consideraciones numéricas, sino más bien como una de las condiciones á que ha debido satisfacer el algoritmo algébrico, para que sus operaciones y reglas, basadas en definiciones más amplias y extensivas que las de la Aritmética, comprendan las de esta última ciencia como casos particulares.

Si esta es la forma que puede darse á la solución del problema, no fué por cierto la misma con que hubo de presentarse en un principio; siguiendo un orden inverso se comenzó primero por generalizar formas conocidas y se ampliaron después las operaciones conjuntamente con la noción de cantidad, á medida que el mismo simbolismo se encargó de revelar con marcada insistencia, bajo forma de expresiones negativas é imaginarias, las incompatibilidades á que tales generalizaciones conducían: singular ejemplo éste de lo que podría llamarse la potencialidad lógica del algoritmo matemático. Ya que hemos comenzado por una digresión sobre una materia que debe ser familiar á todo estudiante de matemáticas, diremos que ha sido tan sólo porque ella nos trae al punto que constituye uno de los méritos mayores de esa notable creación de Hamilton, á que él dió el nombre de *Cálculo de los Cuaternios*.

Raras veces, en efecto, suelen presentarse ejemplos tan pujantes en cuanto á la novedad de las concepciones, la fecundidad de la teoría y generalidad de los méto-

dos, como el que ofrece el referido cálculo; ó en que se manifiesten además, de una manera tan clara y perentoria, las ventajas que deriva el análisis matemático de la adopción de convenciones adaptadas á la naturaleza de los elementos que entran en él, aunque las relaciones combinatorias que resulten de tales convenciones no sean siempre susceptibles de interpretación cuantitativa.

Sabido es que en la antigua geometría el producto  $ab$  de dos líneas ó mejor dicho de los dos números que expresan sus longitudes, representan el área del rectángulo construido con ellas, lo cual exige que dichas líneas sean perpendiculares entre sí; del mismo modo el producto  $abc$  representa el volumen del prisma rectangular cuyas aristas son iguales á  $a, b$  y  $c$ . Ahora bien, la introducción en el análisis, de la nueva operación llamada multiplicación escalar por algunos y multiplicación polar ó externa por otros, permite extender el significado del producto de dos y de tres líneas al caso en que éstas formen un ángulo cualquiera entre sí, de modo que  $ab$  viene á ser el área del paralelogramo contruido con  $a$  y  $b$ , y el producto  $abc$ , el volúmen del paralelepípedo de aristas iguales á  $a, b$  y  $c$ . Esta sola consideración basta para hacer entrever el mayor grado de generalización á que pueden conducir los nuevos métodos, la diferencia entre éstos y la geometria analítica, por ejemplo, consiste en que en esta última los elementos del cálculo son números representativos de entes geométricos, mientras que en los primeros lo son los mismos entes geométricos que intervienen en las relaciones de las figuras sometidas al cálculo. Las propiedades principales que distinguen los métodos á que nos hemos referido, y en los cuales comprendemos el de Hamilton y aquellos que le son congéneres, como el del insigne Grassmann, de desprenden de la múltiplicación ya aludida, la cual, apartándose de las reglas del álgebra común reconoce en  $ab$  y  $ba$  dos productos diferentes, no conformándose así á la ley conmutativa de la multiplicación numérica, de donde resulta un algoritmo sujeto, en general, á reglas también diferentes, de las que tienen por basé la multiplicación cuantitativa; en el sistema de Hamilton la relación característica es esta:  $i^2 = -1$  y en el Grassmann esta otra:  $i^2 = 0$ , sin que por esto sea  $i$  *imaginaria* en el primer sistema ó *cero* en el segundo.

III, (1890),  
pág. 256.

Por extrañas que parezcan las dos relaciones anteriores, como lo son, en efecto, desde el punto de vista estrictamente cuantitativo, su aparición en el dominio de las matemáticas marca, no obstante, uno de los mayores adelantos en él realizados y justifica, en cierta manera, la grande extensión atribuida á esta ciencia por el célebre matemático americano *Benjamin Pierce*, quien la define diciendo que es *la ciencia que deduce conclusiones necesarias*. (*Pierce's Associative Linear Alge-*

*bra.*) Esta definición, debida al matemático que logró investigar las propiedades de 162 sistemas de álgebra diferentes (*Wood - Elements of Coordinate Geometry*), y por la cual se ensanchan los horizontes de las matemáticas hasta hacerlos abarcar todos los ramos del saber humano capaces de ser sometidos á un raciocinio simbólico, puede dar una idea del prodigioso desarrollo alcanzado por dicha ciencia en el presente siglo. Tan grande ha sido el impulso dado á este desarrollo con los sistemas modernos que, salvo para aquellos que se dedican con especialidad al estudio de ellos, difícil en extremo es seguir el paso de las nuevas teorías á que ellos sirven de base. Débese esto en parte, á la escasez relativa de obras didácticas sobre la materia, pero más que todo al poco interés con que fueron recibidos los primeros trabajos de esta índole y á la falta de importancia atribuida á tales estudios por los centros de enseñanza superior, lo cual ha impedido hasta ahora su difusión entre la generalidad de los que cultivan las matemáticas; la reacción favorable no ha tardado en manifestarse, sin embargo, y el movimiento que actualmente se verifica en este sentido, parece indicar que estamos en un período de transición, pasando el cual veremos surgir un nuevo cuerpo de doctrina cuyos métodos más generales que los presentes, ocuparán el lugar que éstos tienen en la enseñanza y en la práctica elevada de las profesiones científicas.

Tal resultado puede considerarse además como una necesidad que emana del estado actual de la ciencia, en vista de la progresión creciente que sigue el número de los diversos ramos en que ella se divide y subdivide al dilatar la esfera de sus aplicaciones. Acaece á este respecto que, por una parte, la especialidad profesional de impone cada día con más fuerza como el medio más eficaz para alcanzar el grado de idoneidad y pericia que exige la práctica de las profesiones; por la otra, al contrario, que la íntima correlación que revelan los descubrimientos modernos entre los distintos ramos de la ciencia, hace cada día también más necesario, para todo el que aspire á moverse en la región científica de su práctica profesional, el comprender en un solo cuadro metódico y razonado los principios fundamentales de la ciencia moderna. Esta última tarea será tanto más fácil cuanto mayor sea el alcance y generalidad de los métodos analíticos, que son el principal instrumento deductivo para llegar al conocimiento de las leyes que rigen el mundo físico y que sirven, á la vez, de poderoso auxiliar retentivo, gracias á la elocuente consición del formulario matemático.

No pretendemos, por cierto, predecir las modificaciones que están reservadas á las asignaturas de matemáticas en los planteles de enseñanza superior; sólo tenemos en mira llamar la atención hacia un punto que ha sido juzgado de importancia

por hombres de eminencia científica, como el profesor Peano de la Universidad de Turín, quien se expresa de estos términos á ese respecto: *E però mia opinione che fra non molto tempo, questo calcolo geometrico, o qualche cosa di analogo, si sostituirá ai metodi attualmente in uso nell'insegnamento superiore* (Peano. *Calcolo geométrico pag. 7*).<sup>1</sup> El cálculo geométrico del profesor Peano representa una de las últimas faces asumidas por los sistemas expositivos del análisis moderno, basadas en las teorías de Grassmann, y representa un todo coordinado con claridad y rigor analítico, cuyo estudio merece recomendarse.

Por lo que toca al Cálculo de los Cuaternios, que es el único de que trataremos en lo que sigue, empezaremos por decir que no debe pretenderse poder apreciar todas sus ventajas en la ligera reseña que daremos de sus *elementos* ni que es éste tampoco el objeto que nos hemos propuesto; aquello exige el estudio detenido de obras magistrales como la del célebre Hamilton yá citada, en la cual se atestigua, con numerosas aplicaciones á las teorías geométricas modernas, así como á la física y á la mecánica, el poderoso alcance de dicho cálculo.

Nuestro objeto es tan sólo iniciar al estudiante en los métodos del preferido autor, convencidos primero, de que ellos son accesibles á todo aquel que haya cursado con provecho las matemáticas superiores como se enseñan comúnmente, y segundo, que una vez familiarizado el lector con los principios que sirven de base al algoritmo de los cuaternios, fácil le será proseguir el provechoso y deleitable estudio de los demás sistemas que forman el conjunto de las doctrinas matemáticas modernas. Debe tenerse presente, en efecto, que el primer paso es el más difícil al emprender tales tareas y que la dificultad no proviene, en general, de la naturaleza sino más bien de la novedad del asunto; esto se verifica en el caso que nos ocupa, sobre todo si en la exposición de la teoría no se insiste con acierto en la distinción que debe hacerse entre las relaciones de operaciones y aquellas puramente numéricas, por ser el cálculo de los cuaternios un cálculo esencialmente de operaciones y no tan sólo de cantidades.

En atención á lo que acabamos de decir, hemos preferido, en nuestra reseña, incurrir en repeticiones y ser demasiado prolijos en ciertos detalles que deben suponerse conocidos del que estudia la materia, á no dejar dudas capaces de confundir al lector ó poner trabas á su estudio progresivo; creemos además que en la exposición didáctica de una teoría matemática debe evitarse al estudiante todo

---

<sup>1</sup>Es, sin embargo, mi opinión que dentro de poco tiempo este cálculo geométrico, ó alguna cosa análoga, sustituirá los métodos actualmente usados en la enseñanza superior.— (Peano, *Cálculo geométrico*, pág. 7.)

trabajo intelectual que desvíe su atención de la idea primordial; á este fin conviene, en general, explanar las transformaciones algebraicas y otras que ocurren, y que queden convenir como ejercicios tratándose de sus respectivos ramos pero que al no ser así suelen contribuir á que el estudiante encuentre laborioso un estudio que pudo talvez reducirse á una simple lectura sin la omisión de operaciones intermedias. Antes de entrar en materia, debemos dejar dicho que las obras de que nos hemos servido en la preparación de esta introducción elemental al cálculo de los cuaternios, han sido la de Hamilton, titulada *Elements of Quaternions (1886)* y la ya citada del profesor Wood, en la cual este autor dedica á esta materia un breve é interesante artículo.

Observamos además, que hemos introducido algunas palabras que no se hallan en el diccionario de la lengua, principiando por la traducción de la palabra inglesa *quaternion*, cuyo equivalente español no conocemos; los otros vocablos como coplanal, colineal, etc, aunque no son indispensables contribuyen ventajosamente á la consición y evitan repeticiones fastidiosas; tales libertades parécenos desde luego justificadas y casi necesarias en vista de la deficiencia y pobreza lamentables de nuestro vocabulario técnico.

### CÁLCULO DE LOS CUATERNIOS.

#### PARTE PRIMERA- VECTORES.

1. *Símbolismo una recta.*—(a). Los símbolos que se emplean en geometría para designar una recta poseen varios grados de determinación, según las circunstancias á que se atiende. Así, al tratarse de una exposición demostrativa entre relaciones puramente geométricas, podemos representar por  $AB$  la línea determinada por la posición de los puntos  $A$  y  $B$ . El oficio de este símbolo es, pues, simplemente objetivo y sólo sirve para patentizar la línea que se considera; él no encierra ningún elemento que particularice el modo de ser de la línea, ya sea con respecto á sí misma, ya sea con respecto á otra cualquiera.

Al aplicar al cálculo algébrico á la Geometría, un primer paso hacia la particularización de las propiedades ó atributos que conviene distinguir en una recta, consiste en compararla á otra recta, tomada por unidad, con el fin de expresar su extensión ó longitud. Aritméricamente, esta medida la da el número, cuya razón con respecto á la unidad abstracta es igual á la que existe entre el largo de la primera y el de la segunda. Todavía en este caso podemos conservar el símbolo  $AB$  y entender por él, como se hace en la Geometría elemental, no solamente la línea que pasa por los puntos  $A$  y  $B$  sino también la longitud de la parte

ó segmento de ella comprendida entre dichos puntos. Por la igualdad  $AB = CD$  se entendera así que la recta *limitada* por los puntos  $A$  y  $B$  es de igual longitud que aquella cuyos límites son los  $C$  y  $D$ .

(b). Hasta aquí no hemos salido del simbolismo común. Supongamos ahora que se desee expresar el paralelismo de dos rectas. Como esta relación equivale á una igualdad de ángulo ó inclinación de las dos líneas con respecto á una tercera tomada arbitrariamente en el plano de ambas, vemos que la acepción del signo  $=$  puede extenderse hasta comprender también dicha igualdad de ángulo ó paralelismo. Esto justifica la convención de que por  $AB = CD$  se entienda que los segmentos  $AB$  y  $CD$  sean de igual longitud y, además, paralelos entre sí. Dicha igualdad es, pues, cuantitativa y atributiva ó cualitativa á la vez, y comprende á la igualdad cuantitativa como caso particular, v. gr., aquel en que se prescinde del paralelismo.

(c). Obsérvese que las igualdades entre segmentos  $AB = CD = EF$  etc., no implican necesariamente que los segmentos se hallen en un mismo plano, porque sí pasamos un plano por  $CD$  que *no contenga* á  $AB$  y sobre dicho plano trazamos una línea  $EF$  paralela á  $CD$  é igual á ella en longitud, podremos poner  $CD = EF$ ; pero  $AB = CD$ , de donde se tiene  $AB = CD = EF$ . Como este procedimiento puede extenderse á un número cualquiera de segmentos, vemos que la igualdad del paralelismo comprende á todos los segmentos paralelos situados en el espacio.

(d). Según establecido hasta aquí,  $AB$  y  $BA$  representan un mismo segmento; pero si consideramos á un segmento engendrado por el movimiento de un punto, se tiene que la generación puede efectuarse tomando uno cualquiera de los puntos que determinan el segmento como origen del movimiento y el otro como término del mismo, lo que equivale á decir que, considerado en este aspecto, habrá de distinguirse en un mismo segmento la propiedad de tener una ú otra de las dos direcciones en que puede ser engendrado.

Es evidente que las convecciones precedentes no se oponen al establecimiento de esta otra, que consiste en indicar la *dirección* de un segmento por el *orden de posición* de los puntos que lo determinan. Así,  $AB$  indicará el segmento cuya dirección coincide con la de la trayectoria de un punto que se mueve en línea recta de  $A$  á  $B$ ;  $BA$  indicará el mismo tomado en dirección opuesta.

2. *Definición del Vector.*— A todo segmento rectilíneo considerado en el triple aspecto de *longitud*, *paralelismo* y *dirección*, se llama *vector*. Un vector envuelve la idea de una traslación rectilínea en el espacio, y puede considerarse como un agente de operación entre elementos geométricos.

Se comprende que una fuerza, una corriente eléctrica y en definitiva, cualquier agente físico en que hayan de considerarse su magnitud, su ángulo con respecto á otros agentes semejantes y su dirección, puede asimilarse á un vector. Una fuerza debe considerarse, sin embargo, como un vector *localizado*, porque en ella hay necesidad de atender al punto de aplicación, mientras que al tratarse de un vector en general, se prescinde por completo de su posición.

3. *Signo de un vector.*— Hemos visto que los símbolos  $AB$  y  $BA$  expresan direcciones contrarias, esto es, condiciones opuestas de existencia; y como esta es precisamente la índole de los signos  $+$  y  $-$ , en el cálculo algébrico tenemos que los dos símbolos de un mismo vector pueden considerarse tácitamente afectados de signos contrarios. Podemos, pues, escribir con entera propiedad:  $AB = -BA$ ; aquí el signo  $-$  indica la operación de invertir la dirección del vector que afecta.

4. *Igualdad vectorial.*— La definición de vector exige, para que se tenga la igualdad entre dos vectores  $ab = cd$ , que ambos vectores llenen la triple condición expresada en el §.2, esto es: que sean de igual longitud, paralelos entre sí y que tengan una misma dirección. A toda igualdad entre vectores se da el nombre de igualdad *vectorial* para distinguirla de una igualdad algébrica ordinaria.

5. *Símbolo de un vector.*—(a). Un vector se representa en general por medio de una sola letra, siendo esta comúnmente alguna de las del alfabeto griego  $\alpha$ ,  $\beta$  etc.

(b), Es esencial observar la regla de no representar por un mismo símbolo sino vectores iguales, de modo que en lugar de  $ab = cd$  pondremos, por ejemplo,  $\alpha = \alpha$ ; mientras que si se tiene  $ab \neq cd$ ,<sup>2</sup> debemos representar dichos vectores con letras diferentes, como  $\alpha$  y  $\beta$ .

(c). Hemos visto que un vector  $ab$  puede considerarse como la distancia recorrida por un punto de  $a$  á  $b$ . Esta concepción cuantitativa conduce á la representación de vectores bajo la forma de una diferencia simbólica y permite considerar á  $ab$  y á  $b - a$  como símbolos equivalentes.

En efecto, si referimos los dos puntos  $a$  y  $b$  á un mismo origen o situado en la misma línea del vector y llamamos  $x_a$  y  $x_b$  á  $o \dots \underline{a} \dots \underline{b}$  las abscisas de  $a$  y de  $b$ , se tiene la igualdad algébrica  $ab = x_b - x_a$ , y suprimiendo la  $x$  obtenemos el símbolo abreviado  $b - a$ .

A esta notación se da el nombre de notación de diferencias simbólicas, porque en ella  $a$  y  $b$  representan *puntos* en vez de cantidades.

6. *Tensor*— El número que expresa la longitud de un vector se llama *tensor*,

---

<sup>2</sup>El signo  $\neq$  se lee: diferente de.

y se indica por medio de la letra  $T$  colocada delante del símbolo vectorial: así,  $T\alpha$  representa el largo del vector  $\alpha$ , y se lee *tensor de  $\alpha$* . De toda igualdad entre vectores como  $\alpha = \beta = \gamma = \dots$  etc. se tiene según la definición del vector, la igualdad algebraica  $T\alpha = T\beta = T\gamma = \dots$  etc.

7. *Definiciones.*— Se dice que un vector  $ab$  es finito ó *real* siempre que los puntos  $a$  y  $b$  ocupan posiciones distintas; si dichos puntos coinciden, el vector es *nulo* y su símbolo es  $aa$ , ó bien  $a - a$ , en la notación simbólica.

Los dos puntos que determinan un vector reciben los nombres de *origen* y *término* del vector, siendo el origen aquel que se considera como punto inicial.

IV.(1890),  
pág. 118

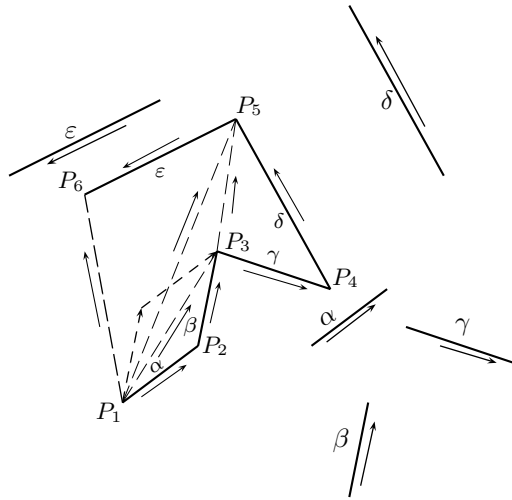
8. *Suma de vectores ó suma vectorial.*—(a). De la naturaleza misma de un vector se sigue que, en general, no será posible obtener la suma de varios vectores bajo una forma cuantitativa ó numérica. En efecto, si representamos por  $\alpha, \beta$  y  $\gamma$  tres vectores cualesquiera no iguales (5 - b)<sup>3</sup> se tendrá que estos símbolos representan entidades heterogéneas con respecto á la condición de paralelismo y de consiguiente no susceptibles de ser expresadas en términos de una misma unidad. Si empleamos, pues, el signo + para indicar una operación exclusivamente cuantitativa, el simbolismo adoptado sólo conduce á identidades de la forma:  $\alpha + \beta + \gamma = \alpha + \beta + \gamma$ .

Este caso es evidentemente análogo á aquel en que se pide la suma de dos cantidades indeterminadas  $a$  y  $b$ , y que sólo pueden revolverse indicando la operación  $a + b$ .

(b). Posible es, sin embargo, ejecutar con los vectores una operación general que comprende á la adición común como caso particular.

---

<sup>3</sup>Observación: (5 - b) indica que se hace referencia al párrafo 5.º y á la subdivisión b; en adelante se omitirá el número siempre que la subdivisión corresponda al mismo párrafo que se lea.



Sean los vectores  $\alpha, \beta$  etc., representados en la figura, y tracemos primeramente á partir de un punto cualquiera  $P_1$  las líneas  $P_1P_2$  y  $P_2P_3$  una á continuación de la otra, respectivamente paralelas é iguales en magnitud y dirección á  $\alpha$  y  $\beta$ . Según la definición de vectores tendremos  $P_1P_2 = \alpha$  y  $P_2P_3 = \beta$ . También vemos que esta operación conduce invariablemente al punto  $P_3$ , ya sea que comencemos por  $\alpha$ , ya sea que comencemos por  $\beta$ , como lo patentiza el paralelogramo de la figura cuya diagonal es  $P_1P_3$ . Esto nos dice que el resultado de la operación es *determinado* y que podemos simbolizarlo por medio de los puntos  $P_1$  y  $P_3$  ó sea por  $P_1P_3$  ó  $P_3 - P_1$ , esto, es, por un vector, puesto que dicho resultado equivale á una traslación rectilínea de  $P_1$  á  $P_3$ . Si establecemos la *convención* de que el signo  $+$  indique esta operación y no simplemente la adición cuantitativa, podemos escribir:

$$\alpha + \beta = \beta + \alpha = P_1P_3 \dots \dots \dots (1)$$

La igualdad (1) expresa que el agregado de las traslaciones simbolizadas por los vectores  $\alpha$  y  $\beta$  es *equivalente* á la traslación que corresponde al vector  $P_1P_3$ .

Si ahora continuamos la operación trazando desde  $P_3$  los vectores  $\gamma, \delta$  y  $\epsilon$ , unos á continuación de otros, obtendremos por resultado final el vector  $P_1P_6$ . De acuerdo con la convención establecida podemos, pues, poner:

$$\gamma + \delta = \delta + \gamma = P_3P_5 \dots \dots \dots (2).$$

$$P_1P_3 + P_3P_5 = P_3P_5 + P_1P_3 = P_1P_5 \dots \dots \dots (3).$$

$$P_1P_5 + \epsilon = \epsilon + P_1P_5 = P_1P_6 \dots \dots \dots (4).$$

de donde  $P_1P_6 = \alpha + \beta + \gamma + \delta + \epsilon \dots \dots \dots (5)$

ó sea el resultado de la operación efectuada con todos cinco vectores.

(c). Si se considera extendida la operación á un número cualquiera  $m$  de vectores, se tiene la expresión general:

$$\sum_m^1 \alpha_i = P_1P_{m+1} = \alpha_{m+1} \dots \dots \dots (6)$$

en que en vez de representar los vectores por  $\alpha\beta$  etc, los representamos por  $\alpha_1, \alpha_2$  etc.

Las relaciones (1), (2) etc., también nos dan:

$$P_1P_6 = \alpha + \beta + \delta + \gamma + \epsilon = \beta + \alpha\delta + \gamma + \epsilon = \epsilon + \beta + \alpha + \gamma + \delta = \text{etc.}; \text{ y}$$

$$P_1P_6 = (\alpha + \beta + \gamma + \delta) + \epsilon = (\alpha + \beta) + (\gamma + \delta) + \epsilon = \alpha + \beta + \gamma + \delta + \epsilon.$$

Aquí el uso de paréntesis tiene por objeto indicar que se considera la operación parcial ejecutada con los vectores escritos dentro de él.

Estas dos últimas expresiones nos dicen que la operación posee las dos propiedades características de la adición cuantitativa, conocidas por los algebristas modernos con los nombres de ley *conmutativa* y ley *asociativa*; esto es, que el resultado de la operación es independiente del orden en que se tomen los vectores é independiente también del modo como se agrupen los mismos para ejecutar las diversas operaciones parciales en que puede descomponerse la operación total.

La estrecha analogía que existe entre la operación que acabamos de examinar y la adición común, justifica el empleo del signo + para indicar á aquélla así como la denominación de *suma vectorial* con que se le designa.

Una suma vectorial corresponde, como se ve, á un polígono de fuerzas en la grafostática.

Obsérvese que la operación descrita se ejecuta del mismo modo cualquiera que sea la posición de los vectores en el espacio, y que lo dicho acerca de la adición vectorial se aplica de consiguiente á vectores situados en planos diferentes, paralelos ó no entre sí.

9. *Regla de los signos.*-(a). De (8) se sigue que todo polígono puede considerarse como una suma vectorial en la cual uno cualquiera de los lados del polígono es igual á la suma de los demás. Dichos lados quedan de este modo asimilados á vectores y, como tales, pueden ser afectados de los signos + y -. La fijación de estos signos es arbitraria para cada lado, pero una vez establecida, debe permanecer invariable; es, por lo tanto, necesario determinar cuál de los dos signos corresponde á cada uno de los lados ó vectores que componen una expresión sumatoria. Esto se obtiene con facilidad imaginando un punto en movimiento que á partir de

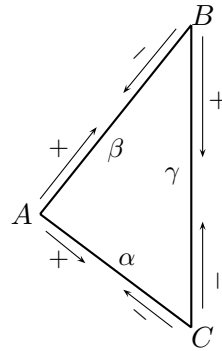
IV.(1890),  
pág. 120

un vértice cualquiera describa sucesivamente los lados del polígono, moviéndose siempre en un mismo sentido, hasta volver al vértice inicial; los signos se determinan entonces por la regla siguiente: cada lado deberá hallarse afectado con el signo que corresponda á aquella de sus dos direcciones opuestas que *coincida* con la del movimiento del punto.

Es evidente que el valor de la suma anterior es *nulo*, por reducirse el vector final á un punto coincidente con el vértice inicial.

(b). Si suponemos que el punto describe todos los lados del polígono *menos el último*, este lado representará el resultado de la suma de los lados restantes y deberá tomarse con el signo que corresponda á aquella de sus direcciones que sea *contraria* á la del movimiento.

(c). Sea por ejemplo, el triángulo *ABC*, en que las dos direcciones opuestas de cada uno de sus lados, considerados como vectores, se hallan marcados con flechas.



Si comenzamos por el vértice *A* y seguimos la dirección *ACB*, podemos poner, según (a) y (b):

$$\alpha - \gamma - \beta = 0 \dots \dots \dots (1).$$

$$\alpha - \gamma = \beta \dots \dots \dots (2).$$

Siguiendo la dirección contraria *ABC*, tendremos:

$$\beta + \gamma - \alpha = 0 \dots \dots \dots (3).$$

$$\beta + \gamma = \alpha \dots \dots \dots (4).$$

Si partimos del vértice *B* en la dirección *BCA*, se tiene:

$$\gamma - \alpha + \beta = 0 \dots \dots \dots (5).$$

$$\gamma - \alpha = -\beta \dots \dots \dots (6).$$

(a). Cambiando los signos de (1) sale (5), cambiando los de (2) sale (6); y (1),(3) y (5) se obtienen de (2),(4) y (6) pasando el segundo miembro al primero. Esto nos dice que en una igualdad vectorial podemos cambiar los signos de sus términos todos á la vez, ó pasar un número cualquiera de ellos de un miembro al otro cambiándoles el signo, como en el Algebra común.

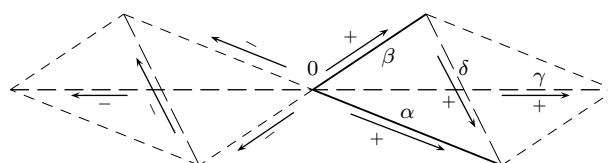
Conforme ya observamos (a), las direcciones positivas y negativas de cada lado son arbitrarias y pueden fijarse independientemente de las de los demás lados. Por ejemplo, si llamamos positiva la dirección del lado  $BC$  que antes tomamos negativa y dejamos las otras direcciones como estaban, las relaciones (1) y (2) asumen la forma:

$$\alpha + \gamma = \beta \quad \text{y} \quad \alpha + \gamma - \beta = 0$$

Las reglas anteriores se aplican igualmente al caso en que los lados se representen por medio de diferencias simbólicas ( $5 - c$ ), de modo que en lugar de (1) podemos escribir:  $C - A + (B - C) = B - A$ , ó bien:  $C - A + (B - C) - B - A = 0$ ; de donde:  $0 = 0$ , lo mismo que si las letras representasen cantidades en vez de puntos. Obsérvese que aquí  $B - C = -\gamma$ , puesto que  $\gamma = C - B$ .

IV,(1890),  
pág. 121

*Regla práctica.*— (d). La regla siguiente puede ser de utilidad al principiante para el manejo rápido de los signos.



Sean dos vectores  $\alpha$  y  $\beta$  considerados como los lados adyacentes de un paralelogramo según lo indica la figura; entonces si las direcciones que corresponden á un mismo signo se alejan ó se acercan del vértice  $O$ , se tendrá:

$$\begin{aligned} \pm(\alpha + \beta) &= \pm\gamma \\ \pm(\alpha - \beta) &= \pm\delta \end{aligned}$$

esto es, la suma de los dos vectores será igual á la diagonal que pasa por el punto de encuentro de dichos vectores, y la diferencia será igual á la otra diagonal.

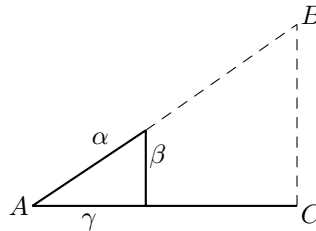
Lo inverso se verifica si una de las direcciones de un mismo signo se aleja y la otra se acerca del origen  $O$ , ó sea:

$$\pm(\alpha + \beta) = \pm\delta \quad \text{y} \quad \pm(\alpha - \beta) = \pm\gamma.$$

10. *Adición de vectores paralelos.*— Reasumamos la expresión general del §.8(c):  $\Sigma_m^1 \alpha_i = \alpha_{m+1}$  y supongamos paralelos todos los vectores; sólo tendremos que atender entonces á sus longitudes y signos, y de consiguiente la operación queda reducida al caso de una adición cuantitativa, y el resultado puede expresarse en términos de la unidad lineal ó sea numéricamente. De este modo se obtiene la adición cuantitativa como un caso particular de la adición vectorial (8 – b).

Siendo  $\alpha$  la unidad lineal, tendremos:  $\Sigma_m^1 \alpha_i = n\alpha_1$ , en que  $n$  puede ser un número cualquiera positivo ó negativo. Esto conduce así á la consideración de vectores afectados de coeficientes, la cual puede entenderse fácilmente al caso en que dichos coeficientes sean cantidades algébricas cualesquiera.

11. *La multiplicación de un polinomio vectorial por una cantidad numérica es una operación distributiva.*— En efecto, por triángulos semejantes tenemos:



$BC = n\beta$ , si  $AB = n\alpha$  y  $AC = n\gamma$ , de donde:  $n\alpha + n\beta = n\gamma$  y sustituyendo por  $\gamma$  su valor  $\alpha + \beta$  tenemos:  $n(\alpha + \beta) = n\alpha + n\beta$ . Pero  $\alpha$  y  $\beta$  pueden descomponerse en la suma de dos vectores; cada uno de estos sumandos en la suma de otros dos y así sucesivamente de modo que podemos escribir:  $n\Sigma\alpha = n\alpha + n\alpha_2 + \dots$

IV.(1890),  
pág. 122

12. *Definiciones.*— En adelante llamaremos vectores *coplanales* á los que estén situados en un mismo plano; *coinciales*, á los que tengan un origen común; y diremos que varios puntos ó vectores son *colineales* siempre que se hallen sobre una misma recta.

13. *Ejemplos.*— Los siguientes casos especiales de adición de vectores merecen examen.

1.º De la igualdad  $ab = -ba$  se tiene:  $ab + ba = 0$ ; como debe ser, puesto que la posición final de un punto que después de moverse de  $a$  á  $b$  ejecuta el movimiento contrario de  $b$  á  $a$ , equivale á aquella en que el punto permanece estacionario en  $a$ ; esto es, hay una traslación nula.

2.º Si  $a, b$  y  $c$  son tres puntos colineales la ecuación  $\frac{a}{b} \frac{b}{c} \frac{c}{d} \quad ab = ac + cb$  da la posición del punto  $c$  con relación á los puntos fijos  $a$  y  $b$ , cualquiera que sea

la posición de  $c$ .

3.º Entre cuatro puntos colineales existe la relación  $ab.cd + ac.db = ad.bc = 0$ . Tenemos en efecto,  $cd = ad - ac$ ;  $bd = ad - ab$  y  $bc = ac - ab$ , sustituyendo estos valores en la relación de arriba, sale:

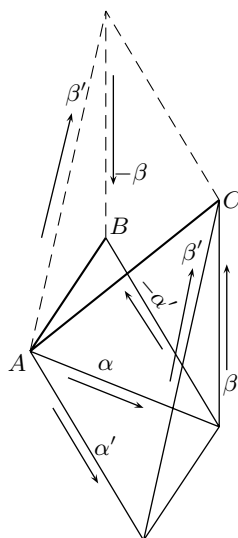
$ab(ad - ac) + ac(ab - ad) + ad(ac - ab)$ , la cual desarrollada es idénticamente igual á cero.

Lo mismo se deduce efectuando las multiplicaciones en la expresión siguiente:  $(b - a)(d - c) + (c - a)(b - d) + (d - a)(c - b)$ .

4.º Si  $a_1, a_2, \dots, a_n$  son puntos en un plano en el espacio, se tiene:  $a_2 - a_1 + a_3 - a_2 \dots + a_n - a_{n-1} = a_n - a_1$  como si se tratase de cantidades.

5.º De las igualdades vectoriales  $\alpha + \beta = \gamma$  y  $\alpha' + \beta' = \gamma$  se tiene axiomáticamente:  $\alpha + \beta = \alpha' + \beta'$ , ó bien (9 - d):  $\alpha - \alpha' = \beta' - \beta$

Este caso corresponde á la figura anexa, de la cual se saca inmediatamente:  $AB = \alpha - \alpha' = \beta' - \beta$  y  $AC = \alpha + \beta = \alpha' + \beta'$ .



14. *Unidad vectorial.*— Puesto que todos los vectores paralelos entre sí son asimilables á cantidades de una misma especie (10), se sigue que tales vectores pueden siempre expresarse en términos de una medida común. Esta medida se llama *unidad vectorial* y es igual á un vector *paralelo* á los otros vectores é *igual* en *longitud* á la *unidad lineal*.

En adelante designaremos la unidad vectorial por medio de un  $\mathbf{1}$ , aplicado como subfijo al símbolo del vector que se considere; así,  $\alpha_1$  será la unidad vectorial

con respecto al vector  $\alpha$  y á todo vector paralelo á él;  $\beta_1$  lo será con respecto á  $\beta$ , y así en seguida.

De lo dicho se tiene que todas las unidades vectoriales que entran en un mismo problema son de igual longitud, y son ó no son paralelas entre sí, según que los vectores que miden lo sean ó nó, ó simbólicamente:  $T\alpha_1 = T\beta_1 = \dots = 1$ ;  $\alpha_1 \pm \beta_1 \pm \dots$ .

Es evidente que una misma cantidad mide vectores paralelos de direcciones opuestas, puesto que dichas direcciones se determinan por los signos + y - y en nadan afectan la unidad de medida.

15. *División de vectores paralelos.*— Según el §10, podemos expresar dos vectores paralelos bajo la forma  $\alpha_2 = m\alpha_1$  y  $\alpha_3 = n\alpha_1$ ; de donde,  $\frac{\alpha_2}{\alpha_3} = \frac{m}{n}$ ; esto es, la razón entre dos vectores paralelos es igual á la razón de sus tensores, y será positiva ó negativa según que éstos tengan ó no tengan signos iguales.

16. *Cantidad escalar.*— Á toda cantidad real, numérica ó algébrica, considerada como representativa de la longitud de una línea ó como la razón entre las longitudes de dos vectores paralelos, se llama, en general, cantidad escalar, ó simplemente *escalar*; se deriva esta denominación de que dichas cantidades pueden representarse por medio de puntos sobre una recta, á guisa de escala.

17. *Aplicación de las reglas del cálculo común á los vectores paralelos.*— En lo que precede hemos dado ejemplos de la aplicación de varias operaciones del cálculo común á vectores paralelos. Sería innecesario extender el número de dichos ejemplos, pues basta saber que tales vectores son comparables entre sí cuantitativamente (10) para reconocer que *el cálculo relativo á ellos está regido por las mismas reglas del álgebra común.*

18. *Criterio de paralelismo entre vectores.*— (a). No pudiendo vectores diferentes ser comparados cuantitativamente no será lícito escribir en general  $\alpha = n\beta$  (5 - b), si  $n$  es un escalar, á menos que se tenga  $n = 0$ . De aquí se sigue que siempre que se obtenga una expresión de la forma anterior como resultado de operaciones entre vectores, se realizará forzosamente una de las dos condiciones siguientes:

1.<sup>a</sup>— Si  $\alpha_1 \neq \beta_1$ ; entonces  $n = 0$ ; 2.<sup>a</sup>— Si  $n \neq 0$ , entonces  $\alpha_1 = \beta_1$ , ó en términos más generales: de la expresión

$$\Sigma\alpha + \Sigma\beta = (\Sigma a).\alpha + (\Sigma b).\beta = (a_1 + a_2 + \dots + a_n)\alpha + (b_1 + b_2 + \dots + b_m)\beta = 0 \dots (1)$$

se desprenden las dos consecuencias que siguen:

(b). Que si por la naturaleza del problema se sabe de antemano que  $\alpha$  y  $\beta$  son vectores *no* paralelos, ó sea si  $\alpha_1 \neq \beta_1$ , se tendrá necesariamente:

$$\Sigma a = 0 \quad \text{y} \quad \Sigma b = 0$$

(c). Que si, por el contrario, se sabe que  $\Sigma a$  y  $\Sigma b$  tienen valores reales, entonces la relación (1) indica que los vectores  $\alpha$  y  $\beta$  son paralelos entre sí, ó bien que  $\alpha_1 = \beta_1$ .

(d). Nótese que siendo la suma de dos vectores diferentes igual á una de las dos diagonales del paralelogramo construido con los vectores por lados, para que dicha suma sea nula es necesario que las diagonales lo sean, lo cual no es posible sino en el caso en que los lados del paralelogramo también sean nulos, de donde se sigue (b), puesto que  $(\Sigma a)\alpha$  y  $(\Sigma b)\beta$  representan vectores diferentes.

IV.(1890),  
pág. 124

19. *Ecuación lineal entre tres vectores coplanales y no paralelos.*—(a). Si  $\alpha, \beta$  y  $\gamma$  son tres vectores coplanales y no paralelos, y existe entre ellos y los coeficientes reales  $a, b$  y  $c$  la relación lineal:

$$a\alpha + b\beta + c\gamma = 0 \dots\dots (1)$$

los vectores  $a\alpha, b\beta$  y  $c\gamma$  representarán los tres lados de un triángulo. En efecto, la definición de la suma vectorial nos dice que uno cualquiera de estos vectores con el signo cambiado es, en virtud de la relación (1), igual á la suma de los otros dos y forma de consiguiente el tercer lado de un triángulo cuyos otros dos lados son los referidos vectores (9).

(b). Inversamente, dado los tres vectores  $\alpha, \beta$  y  $\gamma$ , será siempre posible expresarlos bajo la forma lineal de (1) con sólo dar á los coeficientes  $a, b$  y  $c$  valores adecuados; porque basta para ello contruir un triángulo cuyos lados sean paralelos á  $\alpha, \beta$  y  $\gamma$ , operación posible en todos los casos, y reemplazar los coeficientes por las respectivas razones entre los *tensores* de los lados ó vectores de dicho triángulo y los de  $\alpha, \beta$  y  $\gamma$

(c). De  $a\alpha + b\beta = b\beta + a\alpha$  se sigue que la relación (1) determinan los cuatro vértices de un paralelogramo.

(d). Si los tres vectores no son coplanales, la relación (1) sólo podrá subsistir en tanto que se tenga  $a = 0, b = 0$  y  $c = 0$ ; porque si pasamos un plano por dos de los vectores, como  $a\alpha$  y  $b\beta$ , y efectuamos la suma de ellos, tendremos una expresión de la forma  $a\alpha + b\beta = d\delta$ , y sustituyendo en (1),  $d\delta + c\gamma = 0$ ; pero  $\delta$  y  $\gamma$  están, por hipótesis, situados en planos diferentes y no paralelos; estos vectores son, por consiguiente, diferentes, y tendremos  $(18 - b.) : d = 0$  y  $c = 0$ . El primero de estos valores nos da  $a\alpha + b\beta = 0$  y por lo tanto  $(18 - b.) : a = 0$  y  $b = 0$

De todo lo expuesto se sigue que la relación (1) es la condición suficiente y necesaria para que tres vectores se hallen situados en un mismo plano.

20. *Condición para que tres vectores coplanales y coinciales tengan sus términos (7) situados en la línea recta.-(a).* Siempre que coexistan dos relaciones de la forma:

$$a\alpha + b\beta + c\gamma = 0 \dots\dots (1)$$

$$a + b + c = 0 \dots\dots (2)$$

entre coeficientes reales  $a, b, c$  y tres vectores coplanales y coinciales,  $\alpha, \beta$  y  $\gamma$ , los términos de los referidos vectores serán colineales.

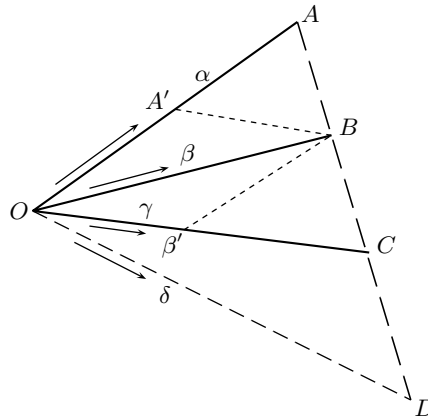
Las relaciones (1) y (2) nos dan:

$$\begin{vmatrix} \alpha & b\beta + c\gamma \\ 1 & b + c \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \beta & a\alpha + c\gamma \\ 1 & a + c \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \gamma & a\alpha + b\beta \\ 1 & a + b \end{vmatrix} = 0 \dots\dots (3);$$

y la primera determinante equivale á  $\alpha(b + c) = b\beta + c\gamma$ , de donde:

$$b(a - b) = c(\gamma - \alpha); \text{ pero de la figura se saca:}$$

IV,(1890),  
pág. 125



$\alpha - \beta = BA$  y  $\gamma - \alpha = AC \therefore b.BA = c.AC$ . Esta relación indica (puesto que  $b$  y  $c$  son escalares) que  $BA$  y  $AC$  son paralelos ( $18 - c$ ); pero dichos segmentos tienen un punto común  $A$ , luego pertenecen á una misma recta y los puntos  $A, B$  y  $C$ , ó bien los términos de los vectores  $\alpha, \beta$  y  $\gamma$  son colineales.

(b). La recíproca de (a) también se verifica: es decir, que si los vectores  $\alpha, \beta$  y  $\gamma$  de la relación (1) tienen sus términos en línea recta, se tendrá necesariamente la relación (2) entre los coeficientes. En efecto, siendo colineales po hipótesis  $BA$  y  $AC$ , podemos poner:  $BA = nAC$ , y sustituyendo los valores vectoriales de estos segmentos se tiene:  $\alpha - \beta = n(\gamma - \alpha)$ ; de donde  $(n + 1)\alpha - \beta - n\gamma = 0$ , en la

cual existe la identidad  $n + 1 - 1 - n = 0$  entre los coeficientes, que corresponde á  $a + b + c = 0$  en (1).

(c). Las igualdades (3) de (a) dan inmediatamente:

$$\alpha = \frac{b\beta + c\gamma}{b + c}; \quad \beta = \frac{a\alpha + c\beta}{a + c}; \quad \gamma = \frac{a\alpha + b\beta}{a + b}$$

Si suponemos que cada uno de los tres vectores ocupa por turno la posición de un cuarto vector  $OD = \delta$ , tendremos, llamando  $a', b'$  y  $c'$  los nuevos coeficientes:

$$\delta = \frac{b'\beta + c'\gamma}{b' + c'}; \quad \delta = \frac{a'\alpha + c'\gamma}{a' + c'}; \quad \delta = \frac{a'\alpha + b'\beta}{a' + b'}$$

Estas relaciones conducen á las siguientes:

$$(1) \dots \frac{b}{a} = \frac{AC}{CB}; \quad \frac{b'}{a'} = \frac{AD}{DB} \dots (1)'$$

$$(2) \dots \frac{a}{c} = \frac{BC}{AB}; \quad \frac{a'}{c'} = \frac{DC}{AD} \dots (2)'$$

$$(3) \dots \frac{c}{b} = \frac{BA}{AC}; \quad \frac{c'}{b'} = \frac{BD}{DC} \dots (3)'$$

Dividiendo cada una de las razones de la primera serie por su correspondiente en la segunda, obtendremos tres nuevas, las cuales, junto con sus respectivas recíprocas, forman las seis relaciones anarmónicas *distintas* de los cuatro puntos  $A, B, C$  y  $D$ .

(d). Con referencia á la figura se tiene:  $OA' + OB' = \beta$ , de donde:

$$b \cdot \frac{OA'}{\alpha} + b \cdot \frac{OB'}{\gamma} = b\beta$$

comparando esta expresión con  $a\alpha + c\gamma = -b\beta$ , se obtiene:

$$a = -b \cdot \frac{OA'}{OA} \quad \text{y} \quad c = -b \cdot \frac{OB'}{OC}$$

21. *Aplicaciones.*- Con lo visto hasta aquí poseemos los medios de aplicar el cálculo de los vectores á un crecido número de problemas.

Los ejemplos siguientes, en los cuales se trata de varias relaciones conocidas, pueden servir de ejercicio en el manejo de los símbolos vectoriales.

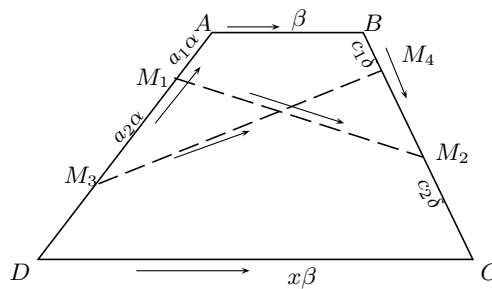
*Observación.*- Antes de pasar adelante observaremos que cuando sea necesario ocurrir en el cálculo de los vectores á construcciones ó relaciones puramente geométricas, esto es, en que las líneas de que se trate se tomen independientemente de la idea de vector, puede convenir, desde el punto de vista didáctico, sobre todo, hacer uso de algún signo que así lo indique. Con este objeto emplearemos en lo

sucesivo un punto colocado sobre el símbolo de una recta; así, al escribir  $AB = a$ , daremos á entender que se trata de la línea  $AB$ , ó sea del largo del vector  $AB$ . Esta notación es más sencilla que su equivalente  $TAB$  (6) y tiene la ventaja de aludir á la índole geométrica de la relación que se considera.

1. Sea el trapecio  $ABCD$  y sea  $M_1M_2$  la recta que divide  $AD$  y  $BC$  proporcionalmente á los números  $a_1, a_2, c_1$  y  $c_2$  respectivamente; tendremos:

$$a_1\alpha + \beta + c_1\delta = M_1M_2 \text{ y también: } -a_2\alpha + x\beta - c_2\delta = M_1M_2$$

$$\therefore 2M_1M_2 = (a_1 - a_2)\alpha + (c_1 - c_2)\delta + (x + 1)\beta \dots\dots (1)$$



Si hacemos  $\dot{A}M_3 = a_2$  y  $\dot{B}M_4 = c_2$ , sólo tendremos que cambiar los signos de los dos primeros términos del segundo miembro de (1) para obtener á  $2M_3M_4$ , de donde:

$$M_1M_2 - M_3M_4 = (a_1 - a_2)\alpha + (c_1 - c_2)\delta \dots\dots (2)$$

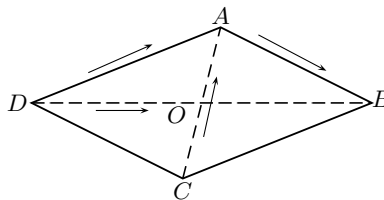
como lo indican las líneas discontinúas de la figura.

Suponiendo en (1)  $a_1 = a_2$  y  $c_1 = c_2$ , se tiene:

$$M_1M_2 = \frac{\beta + x\beta}{2} = \frac{AB + DC}{2};$$

relación conocida y que prueba á la vez que, en este caso,  $M_1M_2$  será paralela á los lados paralelos del trapecio (18 - c).

IV.(1888-1889),  
pág. 127



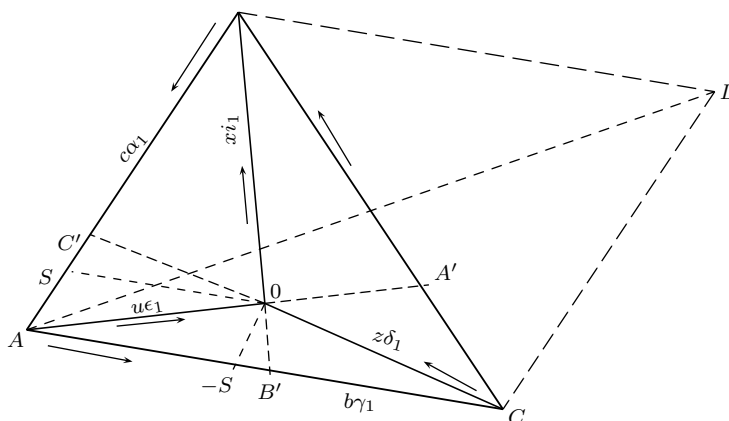
2. Las dos diagonales de un paralelogramo se interceptan en sus puntos medios.

– En el paralelogramo  $ABCD$  hagamos

$$\frac{OB}{DO} = x \quad \text{y} \quad \frac{CO}{AO} = y$$

y tendremos:  $DA + AB = (1 + x)DO$  y  $DA - AB = (1 + y)OA$ , de donde:  $2DA = 2(DO + OA) = (1 + x)DO + (1 + y)OA$ , ó bien:  $(1 - x)DO = (y - 1)OA$ , lo cual nos da  $(1 - x)x = 1$  y  $y = 1$  y de consiguiente:  $DO = OB$  y  $CO = OA$ .

3. Propongámonos hallar los vectores que unen los vértices de un triángulo con un punto  $O$  tomado en su interior como lo indica la figura.



$$\text{Sean : } \begin{cases} AC' = m; & OB = xi_1 \\ AB' = n; & AO = u\epsilon_1 \\ B'B' = p; & CO = z\delta_1 \\ C'C' = q \end{cases}$$

Tomemos, además, el signo  $+$  en la dirección de la flecha de cada vector y llamemos  $a, b$  y  $c$  las longitudes de los lados opuestos respectivamente á los vértices  $A, B$  y  $C$  y sean  $\alpha_1, \beta_1$  y  $\gamma_1$  las unidades vectoriales de dichos lados considerados como vectores. Esto sentado, tendremos:

$$b\gamma_1 + z\delta_1 + xi_1 + c\alpha_1 = 0 \dots \dots (1).$$

También se tiene:

$$AB' + B'B + BA = 0, \text{ ó bien:}$$

$$n\gamma_1 + pi_1 + c\alpha_1 = 0 \dots\dots (2)$$

IV.(1890),  
pág. 128

El triángulo  $ACC'$  da:

$$AC + CC' + C'A = 0, \text{ ó sea:}$$

$$b\gamma_1 + q\delta_1 + m\alpha_1 = 0 \dots\dots (3).$$

De (2) y (3) sale:

$$i_1 = -\frac{n\gamma_1 + c\alpha_1}{p} \quad \text{y} \quad \delta_1 = -\frac{m\alpha_1 + b\gamma_1}{q}$$

Reemplazando estos valores en (1) se obtiene:

$$b\gamma_1 - z \cdot \frac{m\alpha_1 + b\gamma_1}{q} - x \cdot \frac{n\gamma_1 + c\alpha_1}{p} + c\alpha_1 = 0;$$

de donde:

$$(pq \cdot b - pb \cdot z - nq \cdot x)\gamma_1 + (pq \cdot c - qc \cdot x - mp \cdot z)\alpha_1 = 0$$

y (18 - b)

$$nq \cdot x + pb \cdot z - pq \cdot b = 0 \quad \text{y} \quad qc \cdot x + mp \cdot z - pq \cdot c = 0$$

Estas dos ecuaciones nos dan:

$$\begin{vmatrix} nq \cdot x & pb \cdot z - pq \cdot b \\ qc \cdot x & mp \cdot z - pq \cdot c \end{vmatrix} = 0$$

de donde:

$$zq \begin{vmatrix} n & b \\ c & m \end{vmatrix} = q^2 c \begin{vmatrix} n & b \\ 1 & 1 \end{vmatrix}$$

ó bien:

$$z = -\frac{n - b}{cb - mn} \cdot qc$$

Del triángulo  $ACO$  se obtiene:  $u\varepsilon_1 = b\gamma_1 + z\delta_1$ ; reemplazando á  $z$  y  $\delta_1$  por sus valores tenemos:

$$u\varepsilon_1 = b\gamma_1 + \frac{n - b}{cb - mn} \cdot \frac{m\alpha_1 + b\gamma_1}{q} \cdot qc = \frac{(cb^2 + bnc - mnb - cb^2)\gamma_1 + (mnc - mbc)\alpha_1}{cb - mn}$$

y finalmente:

$$u\varepsilon_1 = \frac{(c - m)n\gamma_1 + (n - b)m\alpha_1}{cb - mn} \dots\dots (4)$$

lo que nos da el valor de  $AO$ .

Si ponemos á (4) bajo la forma  $(cb - mn)AQ - (c - m)b \cdot AB' + (n - b)mAB$ , tendremos la identidad entre los coeficientes de los vectores  $AO$ ,  $AB'$  y  $AB$  :  $cb - mn - cb + mb + mn - mb = 0$ , como debe ser, puesto que los puntos  $B, O$  y  $B'$  son colineales.

El método que hemos empleado para hallar el valor de  $AO$  no es el más corto, pero sí constituye un buen ejercicio en el manejo de los símbolos. La expresión (4) se obtiene directamente de esta otra

$$\dot{A}S'\gamma_1 - \dot{A}S\alpha_1 = AO$$

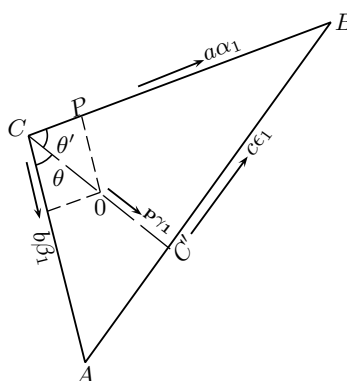
con sólo reemplazar á  $\dot{A}S'$  y  $\dot{A}S$  por sus valores en términos de  $c, b, m$  y  $n$ .

Si hacemos en (4)  $m = \frac{c}{2}$  y  $n = \frac{b}{2}$ , se saca:  $AO = \frac{1}{3}(\gamma - \alpha)$ ; pero  $\gamma - \alpha$  es igual á la diagonal  $AD$ , luego  $AO$  prolongado pasa por el punto medio de  $BC$ : esto nos dice á la vez que *las tres medianas de un triángulo concurren en un mismo punto*.

### CÁLCULO DE LOS CUATERNIOS

4. *Vector que une uno de los vértices de un triángulo con un punto del lado opuesto.*— Sean  $CA = b\beta_1$ ;  $CB = a\alpha_1$  y  $CC' = p\gamma_1$ ; y tomemos  $\dot{C}P = 1$ ; el vector  $CP$  será, pues, igual á la unidad vectorial  $\alpha_1$ .

IV,(1890),  
pág. 150



El triángulo  $COP$  da  $\dot{P}O = \frac{\sin \theta'}{\sin \theta}$ ; el valor del vector  $PO$  es, de consiguiente,  $\dot{P}O\beta_1 = \frac{\sin \theta'}{\sin \theta}.\beta_1$ . Si llamamos  $x$  á  $\dot{C}O$  tendremos

$$\alpha_1 + \frac{\sin \theta'}{\sin \theta}\beta_1 = x\gamma_1, \quad \text{ó bien:}$$

$$x\gamma_1 = \frac{\alpha_1 \sin \theta + \beta_1 \sin \theta'}{\sin \theta} \dots\dots (1)$$

También tenemos que  $CC'$  puede ponerse bajo la forma:

$$p\gamma_1 = \frac{m\alpha_1 + n\beta_1}{m + n}, \quad (20 - c);$$

de donde,  $p\gamma_1 = \frac{p}{x} \frac{(\alpha_1 \text{sen}\theta + \beta_1 \text{sen}\theta')}{\text{sen}\theta} = \frac{ma\alpha_1 + nb\beta_1}{m+n} \dots\dots (2)$ ;

poniendo  $x' \frac{p}{x}$  se tiene:

$$(ma - ax' - bx') \sin \theta \cdot \alpha_1 = (a \sin \theta' \cdot x' + b \sin \theta' \cdot x' - nb \sin \theta) \beta_1,$$

lo que da:

$$ma - ax' - bx' = 0 \quad \text{y} \quad a \sin \theta' \cdot x' + b \sin \theta' \cdot x' - nb \sin \theta = 0.$$

De estas dos ecuaciones se tiene:

$$\begin{vmatrix} (a+b)x' & ma \\ (a+b)x' \sin \theta' & nb \sin \theta \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & ma \\ \sin \theta' & nb \sin \theta \end{vmatrix} = 0$$

$\therefore m = \frac{nb \sin \theta}{a \sin \theta'}$ ; sustituyendo este valor en (2) sale:

$$p\gamma_1 = \gamma = \frac{ab}{a \sin \theta' + b \sin \theta} \left\{ \alpha_1 \sin \theta + \beta_1 \sin \theta' \right\} \dots\dots (3)$$

que es el valor buscando.

5. *Bisectriz de ángulo.*— Si en la expresión (3) del ejercicio anterior hacemos  $\theta = \theta'$ , el vector  $CC'$  será la bisectriz del ángulo en  $C$  y tendrá por valor:

$$\gamma = \frac{ab}{a+b} (\alpha_1 + \beta_1) \dots\dots (1)$$

Como en este caso  $C\dot{O} = 2 \cos \theta$ , también podemos poner:

$$T\gamma = \frac{ab}{a+b} 2 \cos \theta;$$

luego si  $2\theta = 90^\circ$ , se tiene la relación geométrica conocida:

$$CC' = \frac{ab}{a+b} \sqrt{2}.$$

Poniendo  $AC' = x$ , tenemos:

$$x\varepsilon_1 = CC' + AC = \frac{ab}{a+b} (\alpha_1 + \beta_1) - b\beta_1 \quad \text{y}$$

$$\varepsilon_1 = \left( \frac{ab}{a+b} (\alpha_1 + \beta_1) - b\beta_1 \right) \frac{1}{x} \dots\dots (2)$$

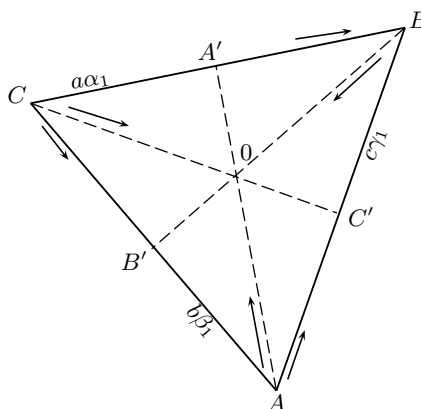
También se tiene:

$$c\varepsilon_1 - a\alpha_1 = -b\beta_1 \therefore \varepsilon_1 = \frac{a\alpha_1 - b\beta_1}{c} \text{ y sustituyendo en (2)}$$

$$c \left\{ \frac{ab}{a+b} (\alpha_1 + \beta_1) - b\beta_1 \right\} = (a\alpha_1 - b\beta_1)x, \text{ de donde:}$$

$$c \frac{ab}{a+b} - ax = 0, \text{ ó bien, la relación conocida } x = AC' = \frac{cb}{a+b}$$

6. Las perpendiculares trazadas desde los vértices de un triángulo á los lados opuestos se cortan en un mismo punto.



Sea 0 el punto de encuentro de las líneas  $CC'$  y  $AA'$  perpendiculares á los lados opuestos  $AB$  Y  $CB$ , respectivamente. El valor  $CC'$  será (relación (3) 21-4):

$$CC' = \frac{ab}{c} \left\{ \alpha_1 \cos A + \beta_1 \cos B \right\}$$

IV.(1890).  
pág. 152

Podemos, pues, escribir las siguientes relaciones, en las cuales  $x, z$  y  $u$  representan coeficientes numéricos por determinar:

$$AO = x.(\gamma_1 \cos C - \beta_1 \cos B) \dots\dots (1)$$

$$CO = z.(\alpha_1 \cos A + \beta_1 \cos B) \dots\dots (2)$$

$$BB' = -u(\alpha_1 \cos A + \gamma_1 \cos C) \dots\dots (3)$$

El triángulo  $AOB$  nos da:  $BO = AO - AB$ , y el triángulo  $BCO$  sale:  $BO = CO - CB$ ; de donde:

$$AO - AB = CO - CB = BO$$

Reemplazando estos vectores por sus valores, se tiene:

$$BO = x(\gamma_1 \cos C - \beta_1 \cos B) - c\gamma_1 = z(\alpha_1 \cos A + \beta_1 \cos B) - a\alpha_1$$

y poniendo por  $\beta_1$  su valor  $\beta_1 = \frac{a\alpha_1 - c\gamma_1}{b}$ , sale:

$$(bx \cos C + cx \cos B + cz \cos B - bc)\gamma_1 = (bz \cos A + az \cos B + ax \cos B - ba)\alpha_1,$$

ó sea  $(18 - b)$ ,

$$\begin{aligned}(b \cos C + c \cos B)x + c \cos B \cdot z - bc &= 0 \\ a \cos B \cdot x + (b \cos A + a \cos B)z - ba &= 0,\end{aligned}$$

de donde:

$$x = \frac{\begin{vmatrix} bc & c \cos B \\ ba & b \cos A + a \cos B \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} b \cos C + c \cos B & c \cos B \\ a \cos B & b \cos A + a \cos B \end{vmatrix}} = \frac{bc \cos A}{a \cos B \cos C + b \cos A \cos C + c \cos A \cos B}.$$

Sustituyendo este valor en la expresión

$$BO = x(\gamma_1 \cos C - \frac{a\alpha_1 - c\gamma_1}{b} \cdot \cos B) - c\gamma_1$$

y llamando  $N$  el denominador de  $x$  se saca:

$$BO = -\frac{ac \cos B}{N}(\alpha_1 \cos A + \gamma_1 \cos C)$$

Comparando esta expresión con (3) vemos que  $BO$  y  $BB'$  son paralelas (18 –  $c$ ); pero estas dos líneas un punto  $B$  en común, luego no son sino segmentos de una misma recta, lo que nos dice que  $BO$  prolongado corta ortogonalmente á  $CA$ ; el punto  $O$  es, por lo tanto, común á las tres perpendiculares  $AA', BB'$  y  $CC'$ .

De las relaciones precedentes se tiene:

$$\frac{BB'}{BO} = \frac{N}{bc \cos B};$$

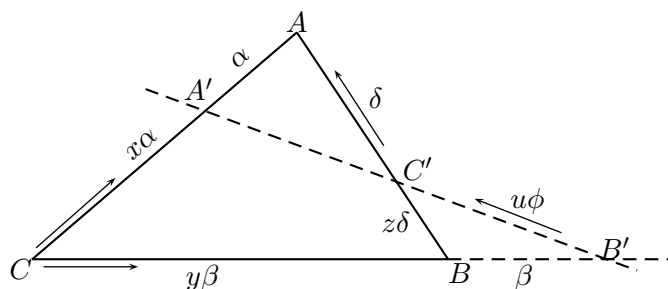
si se trata de un triángulo equilátero las perpendiculares que hemos considerado serán á la vez las medianas y las bisectrices de ángulo, y se tendrá:

$$\frac{BB'}{BO} = \frac{3a \cos^2 B}{a \cos B} = 3 \cos B = \frac{3}{2},$$

puesto que  $B = 60^\circ$  (21 – 3).

7. *Teorema de Menelaus.*— Sea un triángulo  $ABC$  cortado por la transversal  $A'B'$ , y sean además:

$$x = \frac{CA'}{AA'}; \quad y = \frac{CB}{BB'}; \quad z = \frac{BC'}{AC'}.$$



Tenemos las relaciones:

$$y\beta + (z + 1)\delta = (x + 1)\alpha \dots\dots (1)$$

$$(y + 1)\beta + (u + 1)\phi = x\alpha \dots\dots (2)$$

$$\phi + \alpha = \delta \dots\dots (3)$$

ó sean las tres ecuaciones:

$$-(x + 1)\alpha + y\beta + (z + 1)\delta + 0\phi = 0$$

$$-x\alpha + (y + 1)\beta + 0\delta + (u + 1)\phi = 0$$

$$\alpha + 0\beta - \delta + \phi = 0, \text{ de donde:}$$

$$\begin{vmatrix} -(x + 1) & y & (z + 1)\delta \\ -x & y + 1 & (u + 1)\phi \\ 1 & 0 & (\phi - \delta) \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & -1 & z\delta - u\phi \\ 0 & y + 1 & (u + 1)\phi + (\phi - \delta)x \\ 1 & 0 & \phi - \delta \end{vmatrix} =$$

$$\begin{vmatrix} -1 & z\delta - u\phi \\ y + 1 & (u + 1)\phi + (\phi - \delta)x \end{vmatrix} = 0$$

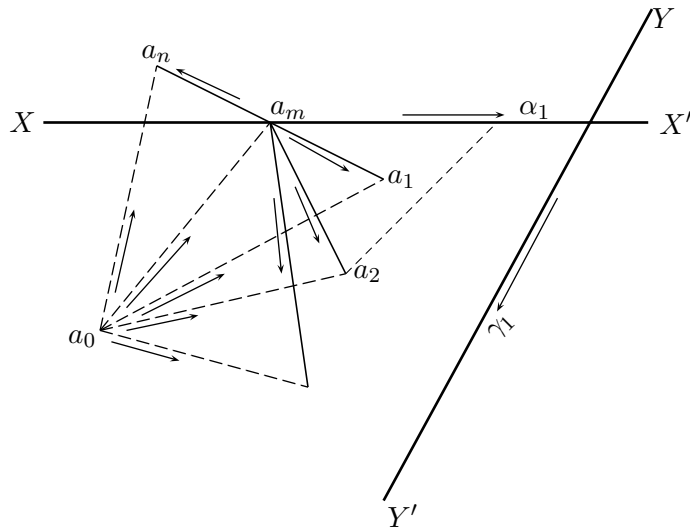
ó bien:  $(u + 1)\phi + (\phi - \delta)x + (y + 1).(z\delta - u\phi) = 0$ ; de donde:  $(y + 1)z - x = 0$  y  $x = z(y + 1)$ .

Reemplazando á  $x, y$  y  $z$  por sus valores tenemos:

$$\frac{CA'}{AA'} = \frac{BC'}{AC'} \cdot \left( \frac{CB}{BB'} + 1 \right) = \left( \frac{CB + BB'}{BB'} \right) \cdot \frac{BC'}{AC'} = \frac{BC' \cdot CB'}{AC' \cdot BB'}$$
 de donde:

$\frac{BC' \cdot CB' \cdot AA'}{AC' \cdot BB' \cdot CA'} = 1$ , que constituye la propiedad fundamental de la teoría de las transversales.

8. *Vector medio y punto medio.*— Sea una serie de puntos, coplanales ó nó:  $a_m, a_1, a_2, a_3 \dots a_n$ , y sea, además,  $a_0$  otro punto tomado como origen de vectores:



IV, (1890),  
pág. 154

Supongamos la relación

$$m_1 a_m a_1 + m_2 a_m a_2 + \dots + m_n a_m a_n = 0 \dots (1)$$

en que  $m_1, m_2, etc$  son escalares; tendremos:

$$\begin{aligned} a_m a_1 &= a_0 a_1 - a_0 a_m \\ a_m a_2 &= a_0 a_2 - a_0 a_m \\ &\dots \dots \dots \\ a_m a_n &= a_0 a_n - a_0 a_m; \end{aligned}$$

sustituyendo estos valores en (1) se tiene:

$$m_1(a_0 a_1 - a_0 a_m) + \dots + m_n(a_0 a_n - a_0 a_m) = 0, \text{ ó bien:}$$

$$m_1 a_0 a_1 + \dots + m_n a_0 a_n - (m_1 + \dots + m_n) a_0 a_m = 0, \text{ de donde:}$$

$$a_0 a_m = \frac{m_1 a_0 a_1 + \dots + m_n a_0 a_n}{m_1 + \dots + m_n} \dots (2)$$

Se prueba sin dificultad que el vector  $aa_m$  corresponde al del centro de gravedad de un sistema de pesos  $m_1, m_2$ , etc, colocados en los puntos  $a_1, a_2$  etc., respectivamente.

Si suponemos  $m_1 = m_2 = \dots \dots = m_n$ , se tiene:

$$a_0a_m = \frac{a_0a_1 + \dots \dots + a_0a_n}{n} \dots \dots (3)$$

en este caso  $a_0a_m$  se llama *vector medio* con respecto á los otros vectores  $a_0a_1, a_0a_2$  etc.

Si escribimos á (3) bajo la forma de diferencias simbólicas, tendremos:

$$a_m - a_0 = \frac{a_1 + a_2 + \dots + a_n}{n} - \frac{n}{n}a_0$$

$$\therefore a_m = \frac{a_1 + a_2 + \dots + a_n}{n} \dots \dots (4)$$

y el punto  $a_m$  recibe el nombre de *punto medio* con referencia á los demás del sistema.

Suponiendo que  $a_0$  y  $a_m$  coincidan, la relación (3) nos da:

$$a_ma_1 + a_ma_2 + \dots \dots + a_ma_n = 0 \dots \dots (5).$$

Si suponemos los puntos coplanales y los referimos á dos ejes de coordenadas  $XX'$  y  $YY'$  y llamamos  $b_1, c_1; b_2, c_2$  etc., las coordenadas de los puntos  $a_1, a_2$  etc.; y  $\alpha_1, \gamma_1$  las unidades vectoriales paralelas á los ejes, tendremos que el valor de un vector cualquiera  $a_ma_i$  será dado por la relación  $a_ma_i = b_i\alpha_1 + c_i\gamma_1$ , en que sólo hay que atender á los signos de  $b_i, c_i$ , según las direcciones de los ejes que se consideren positivas; sustituyendo en (5) los valores de esta forma resulta:

$$(m_1b_1 + m_2b_2 + \dots \dots + m_nb_n)\alpha_1 + (m_1c_1 + m_2c_2 + \dots \dots + m_nc_n)\gamma_1 = 0;$$

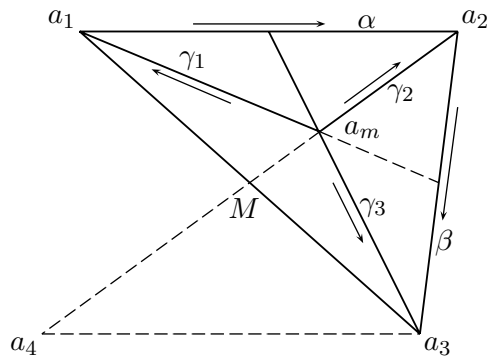
de donde:

$$m_1b_1 + m_2b_2 + \dots \dots + m_nb_n = 0$$

$$m_1c_1 + m_2c_2 + \dots \dots + m_nc_n = 0,$$

relaciones que están de acuerdo con la teoría de los momentos en mecánica, si  $m_1, m_2$ , etc. representan fuerzas paralelas.

*Ejercicio.*- Hállese el punto medio correspondiente á los vértices de un triángulo.



IV,(1890),  
pág. 155

Aplicando (5) se tiene:

$$\gamma_1 + \gamma_2 + \gamma_3 = 0 \dots \dots (1)$$

sustituyendo  $\gamma_1 = \gamma_2 - \alpha$  y  $\gamma_3 = \gamma_2 - \beta$ , sale:

$$3\gamma_2 + \beta - \alpha = 0 \text{ ó bien: } 3\gamma_2 = -(\beta - \alpha)$$

pero  $\beta - \alpha$  es igual á la diagonal  $a_2a_4$ , luego  $M$  es el punto medio entre  $a_1$  y  $a_3$  y  $3\gamma_2 = 2Ma_2 \therefore a_2a_m = \frac{2}{3}a_2M$ .

**PARTE SEGUNDA – CUATERNIOS**

22. *Cociente geométrico.*– Hemos visto (18) que la expresión  $\frac{\beta}{\alpha} = m$ , en la cual  $\beta$  y  $\alpha$  son vectores y  $m$  una *cantidad real*, requiere que  $\beta_1 = \alpha_1$ , y por el contrario, que si  $\beta_1 \neq \alpha_1$  entonces  $\frac{\beta}{\alpha}$  no tiene significado cuantitativo, y la igualdad  $\frac{\beta}{\alpha} = m$  denota, en el concepto *algébrico*, una condición absurda ó imposible, al igual de esta otra:  $\alpha + \beta = m$ , que, según vimos (8 y 10), sólo pueden subsistir en el caso de  $\alpha_1 = \beta_1$ .

Sin embargo, así como la igualdad cuantitativa  $a + b = c$  se extendió por *definición* hasta hacerla comprender la suma vectorial  $\alpha + \beta = \delta$ , del mismo modo el algoritmo de los cuaternios se sirve del símbolo  $\frac{\beta}{\alpha}$  de una razón algébrica ó numérica para designar una operación ejecutada con vectores, á la cual, por analogía con aquella, se da el nombre de *cociente geométrico*.

23. *Definición y naturaleza de la división vectorial ó cociente geométrico.*

(a).- Sean  $\alpha$  y  $\beta$  dos vectores coinciales y  $x$  el ángulo comprendido entre ellos. Si hacemos girar á uno de estos vectores, á  $\alpha$  por ejemplo, en un ángulo  $x$ , en el sentido que convenga, hasta que coincida en *dirección* con  $\beta$ , y luego alteramos la *longitud* de  $\alpha$  hasta que coincida también con la de  $\beta$ , podremos decir que hemos engendrado este último vector por medio de una operación ejecutada sobre  $\alpha$ . A

esta operación se da el nombre de división vectorial ó *cociente geométrico*, y se escribe  $\frac{\beta}{\alpha}$ , si es de  $\alpha$  el vector sobre el cual se opera, y  $\frac{\alpha}{\beta}$  si, por el contrario, lo es  $\beta$ .

La nomenclatura de este simbolismo es igual á la del álgebra común, agregándose tan sólo el calificativo *geométrico* siempre que se quiera especificar la operación; así, en la expresión  $\frac{\beta}{\alpha} = q$ ,  $q$  es el *cociente geométrico* correspondiente al *dividendo geométrico*  $\beta$  y al *divisor geométrico*  $\alpha$ .

Aunque hemos supuesto que los dos vectores tienen un origen común, lo anterior se aplica á dos vectores cualesquiera, pues si no son coinciales bastará, para hacer que lo sean, trasladarlos lo suficiente paralelamente á sí mismos.

IV.(1890),  
pág. 156

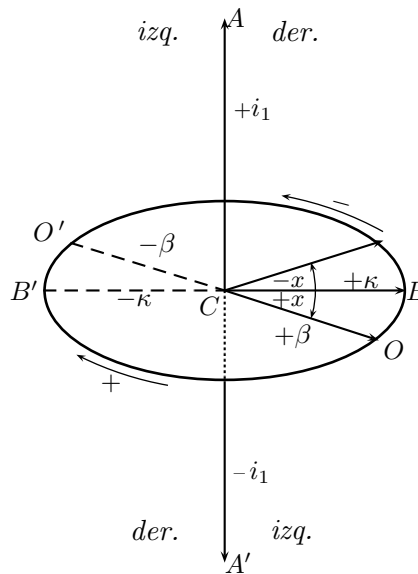
(b). El cociente puede también escribirse:  $\frac{b.\beta_1}{a.\alpha_1}$ , en que  $\beta_1$  y  $\alpha_1$ , son, como de costumbre, las unidades vectoriales correspondientes á  $\beta$  y á  $\alpha$ , siendo  $b$  y  $a$  sus respectivas longitudes ó *tensores*. Esta forma patentiza la naturaleza compleja del cociente, el cual se descompone en una razón algébrica  $\frac{b}{a}$  y en otra entre unidades vectoriales  $\frac{\beta_1}{\alpha_1}$ ; en la primera sólo se atiende á la magnitud lineal de los vectores, y en la segunda, á lo que podemos llamar su magnitud directiva ó angular.

Podemos, pues, decir que un cociente geométrico comprende á la razón algébrica, ó bien que  $\frac{\beta}{\alpha}$  es siempre igual á  $\frac{b}{a}$  veces el resultado de la operación simbolizada por  $\frac{\beta_1}{\alpha_1}$ . Esta última operación equivale (a) á hacer girar la unidad vectorial  $\alpha_1$  hasta que coincida con la otra  $\beta_1$ ; vemos, además, que en el caso particular de  $\beta_1 = \alpha_1$  la división vectorial se reduce á la división algébrica, puesto que entonces  $\frac{\beta}{\alpha} = \frac{b}{a} = un\ escalara$ .

(c). *Plano de un cociente.*- En la definición que hemos dado de la división vectorial no se ha tomado en cuenta el plano de los vectores que forman los términos del cociente; ella se refiere así á un cociente entre vectores cualesquiera de posiciones indeterminadas en el espacio; mas al aplicar dicha división al cálculo se hace necesario distinguir los cocientes que se hallan en un mismo plano ó en planos paralelos, de los que se encuentran en planos oblicuos entre sí. La determinación de un cociente geométrico exige así que se fije la dirección del plano de sus vectores; esta dirección quedará determinada siempre que se tenga la de una línea perpendicular al plano, llamada *eje* del plano.

(d). *Elementos determinativos de la operación.*- Para obtener la representación analítica y completa de una división vectorial, es necesario conocer todos los ele-

mentos que entran en ella. Conviene, por tanto, acordar el modo de determinar dichos elementos y examinar la influencia que ellos ejercen en la operación. Con este objeto y con el de insistir de nuevo en lo ya referido acerca de ellos, entraremos en las consideraciones siguientes:



IV.(1890),  
pág. 157

Sea un triángulo isósceles  $ABA'$  y consideremos la base circular  $BOB'B$  común á los dos conos que pueden engendrarse con la revolución de los dos triángulos, rectángulos en  $C$ ,  $ACB$  y  $A'CB$  al girar al rededor del lado  $CA$  ó del lado  $CA'$ .

Llamemos  $CA = i_1$ ;  $CB = \kappa$ ;  $CO = \beta$ , y asimilemos estas tres líneas á tres vectores; la primera á un vector unitario, y las otras dos á vectores de igual longitud, puesto que son radios de un mismo círculo. Considerando positivas sus respectivas direcciones, tendremos:  $CA' = -i_1$ ,  $CB' = -\kappa$  y  $CO' = -\beta$ .

Ahora uno cualquiera de los radios del círculo  $BOB'B$  puede considerarse determinado por la posición que toma otro cualquiera de ellos,  $CB$  por ejemplo, al girar al rededor de  $CA$  ó de  $CA'$  en la generación de uno ú otro cono, y consecuentes con la definición de vector, debemos ver en cada una de estas posiciones del radio inicial  $CB$  otros tantos vectores distintos, con respecto á los cuales sólo podemos escribir  $T\beta = T\kappa$ .

Esto sentado, veamos cuáles son los elementos necesarios para poder determinar la posición de un radio cualquiera  $CO = \beta$  con relación á otro cuyo movimiento se considere.

Con referencia á un radio inicial, dicha posición depende evidentemente:

- 1.º Del vector  $i_1$  ó  $-i_1$  que se tome por eje.
- 2.º Del ángulo descrito.
- 3.º De la dirección del movimiento ó rotación.

Estos tres elementos se reducen á la determinación de una distancia (arco recorrido) y de dos direcciones: la del eje y la del movimiento. La dirección del eje, según hemos visto yá, se determina por medio de los signos  $+$  y  $-$ , como la de todo vector; para determinar la del movimiento pueden también emplearse dichos signos; pero es de observarse que ella depende no sólo del sentido absoluto del movimiento, sino á la vez del eje que se considere, y así como estos ejes tienen direcciones opuestas, así también es fácil reconocer que la dirección del movimiento del radio inicial debe considerarse invertida al pasar de un eje á otro.

En efecto, si suponemos á un observador sentado sobre el vértice  $A$ , dando la espalda al lector, de modo que su izquierda y su derecha queden en las posiciones marcadas en la figura, entonces para otro observador colocado en posición análoga sobre el vértice  $A'$ , las referidas posiciones se hallarán invertidas y el movimiento cuya dirección es de izquierda á derecha para el primero será de derecha á izquierda para el segundo, é inversamente.

Teniendo esto presente, si llamamos rotación positiva la efectuada de derecha á izquierda, la de sentido contrario será negativa y los signos  $+$  y  $-$  podrán servirnos para designarlas sin riesgo de confusión.

(e). Atendiendo á las convenciones precitadas, sea  $CB$  el radio inicial y  $x$  el ángulo descrito. La posición de  $CO$  quedará perfectamente determinada si decimos que uno ú otro de los dos modos siguientes:

- (1).  $i_1$  sirviendo de eje á  $CB$ , durante una rotación positiva  $x$ , determina ó produce á  $CO$ .
- (2).  $-i_1$  sirviendo de eje á  $CB$ , durante una rotación negativa  $-x$ , determina ó produce á  $CO$ .

La operación que acabamos de examinar equivale al cociente geométrico unitario  $\frac{\beta_1}{\kappa_1}$ . En efecto, tenemos:  $\frac{\beta}{\kappa} = \frac{T\beta}{T\kappa} \cdot \frac{\beta_1}{\kappa_1} = \frac{\beta_1}{\kappa_1}$ , puesto que  $T\beta = T\kappa$  (d).

(f). *Notación exponencial.*— Como el símbolo  $\frac{\beta_1}{\kappa_1}$  no patentiza los elementos de la operación, *eje y ángulo*, se ha convenido siempre que se quiera particularizar dichos elementos, en escribir la operación bajo la forma de igualdad simbólica, á saber:  $i_1^x = \frac{\beta_1}{\kappa_1}$ , en la cual  $i_1$  representa el eje, y  $x$  el ángulo; pudiendo estos

elementos ser positivos ó negativos, según el caso. El símbolo exponencial  $i_1^x$  puede conservar la nomenclatura del álgebra común, llamándose  $i_1$  la base y  $x$  el exponente, sin que por esto deba darse á dicho signo otra interpretación que no sea *extrictamente* la yá consignada.

El hecho de considerar que el movimiento de  $CA$  lleva consigo el del vector inicial, condujo á Hamilton á dar á  $i_1$  el nombre de *operador*. De aquí la locución comúnmente usada en vez de la empleada en (1) y (2), á saber:  $i_1$  *operando* sobre  $CB$  etc.

24. *Radial*.— Para abreviar llamaremos cociente radial ó simplemente *radial* á todo cociente entre vectores de igual longitud. Tal cociente es siempre reductible á un cociente unitario ( $23 - e$ ), esto es, á un cociente entre unidades vectoriales; radial y unitario son, pues, términos de cocientes equivalentes. El nombre *radial* se debe á Hamilton y viene de considerar á vectores diferentes pero de igual longitud, como radios de una misma esfera; á dichos vectores podemos llamar vectores radiales.

25. *Tensor y versor de un cociente*.— Si en  $\frac{\beta}{\alpha} = \frac{b\beta_1}{a\alpha_1}$  hacemos  $\frac{b}{a} = m$  y reemplazamos á  $\frac{\beta_1}{\alpha_1}$  por su equivalente  $i_1^x$  tendremos  $\frac{\beta}{\alpha} = mi_1^x$ , que es la expresión general de un cociente geométrico. El factor  $m$  se llama *tensor* y el  $i_1^x$  *versor* del cociente.

Recordando lo dicho en ( $23 - a$ ), tenemos que la operación se concibe ejecutada por el versor  $i_1^x$ , el cual hace girar al divisor  $\alpha$  hasta que coincida en *dirección* con el dividendo  $\beta$ , y luégo por el *tensor*  $m$ , que altera la longitud de  $\alpha$  en la proporción de  $m$  á 1 hasta hacer que dicho vector coincida en *extensión* con  $\beta$ .

El oficio de un versor es, pues, *hacer girar* (en un plano perpendicular á su dirección), y el de un tensor, *acortar ó alargar*.

A tensores y versores se da también el nombre de *operadores*. Todo radial es un versor.

26. *Cuaternio*.— A todo cociente geométrico, unitario ó no unitario, esto es, de la forma  $mi_1^x = \frac{\beta}{\alpha}$ , en que  $m$  puede tener cualquier valor real, se da el nombre de *cuaternio*.

Hemos visto que para determinar un cociente geométrico es necesario conocer la dirección del plano de sus vectores, ó sea la posición de uno cualquiera de los ejes del plano ( $23 - c$ ). Sabemos, además, que la posición de una línea en el espacio se tiene siempre que se conozcan las trazas de dos de sus planos proyectantes; si la línea pasa por el origen, cosa que podemos suponer en el caso presente,

desde que el eje puede ser una línea cualquiera con tal que sea perpendicular al plano, dichas trazas quedarán determinadas por los dos ángulos formados por ellas con la intersección de los planos de proyección. Esto nos dice que un cuaternio queda completamente determinado por cuatro elementos cuantitativos, de los cuales depende únicamente, á saber: *tensor*, *ángulo de los vectores y las dos cantidades determinativas de la dirección del plano*. De esta propiedad característica derivó Hamilton el nombre de cuaternio, dado á todo cociente geométrico.

27. *Angulo de cuaternio*.— Ángulo de un cuaternio es el ángulo comprendido entre sus vectores, tomado, en general, en el sentido geométrico, es decir,  $> 0$  y  $< \varpi$ .

Los ángulos de dos ó más cuaternios lleban signos iguales cuando se les considera descritos en un mismo sentido, y signos contrarios cuando son descritos en direcciones opuestas 23. Dícese, de consiguiente, que los ángulos de dos ó más cuaternios son de igual ó de diferente signo, según que estén descritos en un mismo sentido ó en sentido contrario.

28. *Medida de ángulo*.— Por razones cuyas ventajas se apreciarán en lo que sigue, conviene adoptar el ángulo recto como unidad de medida en la expresión del ángulo de un cuaternio; luego si por  $\theta$  representamos el valor de dicho ángulo en *grados*, sabemos que  $i_1^x = i_1^{\frac{2\theta}{\varpi}}$ .

29. *Cuaternios iguales*.-(a). Puesto que un cuaternio representa una operación cuyos elementos constituyentes son *tensor*, *eje y ángulo*, resulta que dos ó más cuaternios serán iguales entre sí siempre que tengan tensores iguales, ejes iguales y ángulos iguales.

IV,(1891),  
pág. 211

Recuérdese: 1.º Que lo que hemos llamado eje es un vector unitario *perpendicular* al plano del cuaternio; por ejes iguales debe, pues, entenderse vectores unitarios iguales, esto es, paralelos y de una misma dirección.

IV,(1891),  
pág. 212

2.º Que para los ángulos aquí considerados sean iguales entre sí se requiere no sólo que tengan igual magnitud, sino también que sean descritos en un mismo sentido, esto es, que tengan un mismo signo. En virtud de lo que antecede, podemos definir la igualdad entre dos ó más cuaternios diciendo: llámense cuaternios iguales entre sí los que reúnen las tres condiciones siguientes:

- 1.ª Tener un mismo tensor.
- 2.ª Ser coplanales.
- 3.ª Tener ángulos iguales en magnitud y signo.

(b). De la definición que acabamos de dar se sigue que un cuaternio, considerado como figura geométrica, puede recibir en su propio plano cualquier movimiento

que no altere ninguna de las tres condiciones de igualdad indicadas; podrá, pues, girar sobre un eje ó sufrir una traslación paralela sin que por eso cambie su valor en tanto que sea cociente geométrico.

(c). De lo expuesto en (a) y (b) se desprende que siempre que existan entre dos cuaternios dos relaciones de la forma  $\frac{\beta}{\alpha} = \frac{\beta'}{\alpha'}$  y  $\alpha = \alpha'$ , se tendrá necesariamente como en álgebra  $\beta = \beta'$ .

En efecto puesto que  $\frac{\beta}{\alpha}$  y  $\frac{\beta'}{\alpha'}$  son iguales entre sí podemos considerarlos como coplanales, y sabemos, además, que tienen ángulos iguales y de un mismo signo; por tanto, podemos trasladar uno de ellos hasta hacer que coincidan los dos vectores iguales  $\alpha$  y  $\alpha'$ , y una vez esto hecho, la referida igualdad de ángulos, así como la igualdad de tensores que existen entre ambos cuaternios, exigen que  $\beta$  y  $\beta'$  coincidan en dirección y extensión, de donde se tiene  $\beta = \beta'$ .

30. *Relaciones fundamentales del nuevo cálculo.*— Por base del cálculo de los cuaternios se *adoptan* las siguientes relaciones fundamentales del álgebra común, aplicadas á vectores cualesquiera  $\alpha$ ,  $\beta$  y  $\delta$ , como si se tratase de simples cantidades.

I.  $q = \frac{\beta}{\alpha}$ , ó sea  $q\alpha = \beta$ .

II. Si  $\frac{\beta}{\alpha} = \frac{\beta'}{\alpha'}$  y  $\alpha = \alpha'$ , entonces  $\beta = \beta'$ .

III.  $\frac{\beta}{\alpha} \pm \frac{\delta}{\alpha} = \frac{\beta \pm \delta}{\alpha}$ .

IV.  $\frac{\delta}{\beta} \cdot \frac{\beta}{\alpha} = \frac{\delta \cdot \beta}{\beta \cdot \alpha} = \frac{\delta}{\alpha}$  y  $\frac{\beta}{\alpha} \div \frac{\delta}{\alpha} = \frac{\beta\alpha}{\alpha\delta} = \frac{\beta}{\delta}$ .

(a). La relación *I* es puramente convencional, no siendo sino una de las notaciones empleadas para representar un cuaternio cualquiera  $q$  y un vector cualquiera  $\beta$ ; la *II* se desprende, conforme vimos yá (29–c), de la definición misma de cuaternios iguales; las *III* Y *IV* se establecen, ya sea tomándolas como simples definiciones de la suma y multiplicación de cuaternios, ó bien adoptándolas como formas algébricas aplicables á estas nuevas operaciones definidas independientemente de dichas formas, como veremos en adelante.

(b). Esencial es observar que la adopción de estas relaciones no lleva consigo la de todas las consecuencias algébricas que de ellas se deducen; por ejemplo, de *IV* no debemos deducir esta otra:  $\frac{\beta}{\alpha} \cdot \frac{\delta}{\beta} = \frac{\delta}{\alpha}$ , por esto sería admitir que el orden de los factores no altera el producto, cosa que no sabemos si se verifica mientras no conozcamos lo que en este cálculo se entiende por multiplicación y producto. La

aplicación de dichas relaciones sólo gozará, pues, de generalidad absoluta en tanto que haya identidad de posiciones relativas de los símbolos, y al desarrollo de la teoría que nos ocupa toca justificar las transformaciones á que pueden someterse.

31. *Propiedades de la notación exponencial.*—(a). Tomemos el cuadro siguiente, en que se hallan indicadas algunas de las posiciones del radio inicial con referencia á la figura del (§23 – d).

Numero de orden	Eje	Vector Inicial	Ángulo Descrito	Vector Engendrado
1	$+i_1$	$+\kappa$	$+x$	$+\beta$
2	$+i_1$	$-\kappa$	$+x$	$-\beta$
3	$+i_1$	$+\beta$	$-x$	$+\kappa$
4	$+i_1$	$-\beta$	$-x$	$-\kappa$
1'	$-i_1$	$+\kappa$	$-x$	$+\beta$
2'	$-i_1$	$-\kappa$	$-x$	$-\beta$
3'	$-i_1$	$+\beta$	$+x$	$+\kappa$
4'	$-i_1$	$-\beta$	$+x$	$-\kappa$

Interpretando estas operaciones de acuerdo con la notación exponencial, se tiene (23 – f):

$$A \left\{ \begin{array}{l} (1) \dots i_1^x = \frac{\beta}{\kappa}, \\ (2) \dots i_1^x = \frac{-\beta}{-\kappa}, \\ (3) \dots i_1^{-x} = \frac{\kappa}{\beta}, \\ (4) \dots i_1^{-x} = \frac{-\kappa}{-\beta}, \end{array} \right. \quad \text{ó bien según la relación I} \quad \left\{ \begin{array}{l} i_1^x \cdot \kappa = \beta \\ i_1^x \cdot (-\kappa) = -\beta \\ i_1^{-x} \cdot \beta = \kappa \\ i_1^{-x} \cdot (-\beta) = -\kappa \end{array} \right.$$

$$B \left\{ \begin{array}{l} (1') \dots (-i_1)^{-x} = \frac{\beta}{\kappa}, \\ (2') \dots (-i_1)^{-x} = \frac{-\beta}{-\kappa}, \\ (3') \dots (-i_1)^x = \frac{\kappa}{\beta}, \\ (4') \dots (-i_1)^x = \frac{-\kappa}{-\beta}. \end{array} \right. \quad \text{o bien:} \quad \left\{ \begin{array}{l} (-i_1)^{-x} \cdot \kappa = \beta \\ (-i_1)^{-x} \cdot (-\kappa) = -\beta \\ (-i_1)^x \cdot \beta = \kappa \\ (-i_1)^x \cdot (-\beta) = (-\kappa) \end{array} \right.$$

De estos grupos se saca:

De (1) y (1') y de (3) y (2'), axiomáticamente:  $i_1^x = (-i_1)^{-x} \dots \dots (5)$ .

De (3) y (3') y de (4) y (4') se tiene igualmente:  $i_1^{-x} = (-i_1)^x \dots \dots (6)$ .

Las relaciones (5) y (6) nos dicen que en este cálculo *el exponente y la base pueden cambiar simultáneamente de signo sin que altere el valor de los cuaternios.*

(b). Si adoptamos del álgebra la notación  $i_1^{-x} = \frac{1}{i_1^x}$ , (5) y (6) nos dan:

$$i_1^x = \frac{1}{(-i_1)^x} \text{ y } \frac{1}{i_1^x} = (-i_1)^x \dots \dots (7)$$

Si empleamos el signo  $(-)$  para designar la inversión de la operación  $i_1^x \cdot \kappa = \beta$  y convenimos en que á dicha inversión corresponde inversión del resultado, podemos poner:  $-(i_1^x \cdot \kappa) = -\beta$  comparando esta expresión con (2) se tiene:  $-(i_1^x \cdot \kappa) = i_1^x(-\kappa)$ ; (1') y (2') dan del mismo modo:  $\{-(-i_1)^{-x} \cdot \kappa\} = (-i_1)^{-x} \cdot (-\kappa)$ . Vemos así que la inversión indicada por el signo  $-$  consiste en cambiar de radio inicial, tomando á  $-\kappa$  en lugar de  $\kappa$ ; pero esta operación equivale á hacer girar á  $\kappa$  en dos ángulos rectos, haciéndolo coincidir con  $-\kappa$ , y después á hacerlo describir el ángulo  $+x$ , si se trata de  $+i_1$ , ó  $-x$  si se trata de  $-i_1$ . Representando operaciones equivalentes por símbolos equivalentes tendremos:

$$-(i_1^x \cdot \kappa) = i_1^x(-\kappa) = i_1^{2+x} \cdot \kappa = (-i_1)^{2-x} \cdot \kappa \dots \dots (8)$$

De (3) se saca igualmente:

$$-(i_1^{-x} \cdot \beta) = i_1^{-x} \cdot (-\beta) = i_1^{2-x} \cdot \beta \dots \dots (9)$$

Las igualdades (8) y (9) nos permiten escribir estas otras:

$$-i_1^x = i_1^{2+x} = (-i_1)^{2-x} \text{ y } -i_1^{-x} = \frac{1}{-i_1^x} = i_1^{2-x} \dots \dots (10)$$

(c). Si en  $i_1^x$  hacemos  $x = x_1 + x_2 + \dots + x_m$ ,  $i_1^{x_1+x_2+\dots+x_m}$  representará  $m$  rotaciones sucesivas iguales respectivamente á  $x_1, x_2$ , etc. En adelante se verá que los índices siguen la ley algébrica, pudiéndose escribir:

$$i^{x_1} i^{x_2} \dots i^{x_m} = i^{x_1+x_2+\dots+x_m}$$

(d). Téngase presente que en las relaciones que anteceden  $i_1^x$  es un símbolo de *operación* y no de cantidad, en la acepción común de esta palabra; las referidas igualdades son, pues, simbólicas y representan operaciones equivalentes.

32. *Reducción de cuaternios á un común denominador.*-(a). Dos ó más cuaternios pueden reducirse á un común denominador sin que se alteren sus valores.

En efecto, sean los dos cuaternios  $\frac{\beta}{\alpha} = \frac{b}{a} \cdot \frac{\beta_1}{\alpha_1}$  y  $\frac{\beta_1}{\alpha_1}$  y tomemos los dos vectores  $\gamma$  y  $\delta$  coplanales con  $\alpha$  y  $\beta$  tales que tenga:

$$T\delta = \frac{b}{a} T\gamma;$$

supongamos, además, que estos vectores encierren un ángulo igual en magnitud

y en signo al comprendido entre  $\alpha$  y  $\beta$ ; tendremos  $\frac{\beta}{\alpha} = \frac{\delta}{\gamma}$  (29), y de un modo análogo se obtiene:  $\frac{\beta'}{\alpha'} = \frac{\delta'}{\gamma}$ ; lo que da la reducción buscada.

(b). Obsérvese que esta operación no exige que los cuaternios sean coplanales, porque es claro que el vector  $\gamma$ , que sirve de denominador común, puede tomarse, ya sea en la intersección de los planos de dos cuaternios no coplanales, ya sea en uno y otro plano, siempre que sea paralelo á dicha intersección.

33. *Adición de cuaternios.*-(a). Sean los cuaternios:  $q = \frac{\beta}{\alpha}$  y  $q' = \frac{\beta'}{\alpha'}$ ; reduciéndolos á un común denominador  $\gamma$  tendremos, de acuerdo con la relación fundamental III:

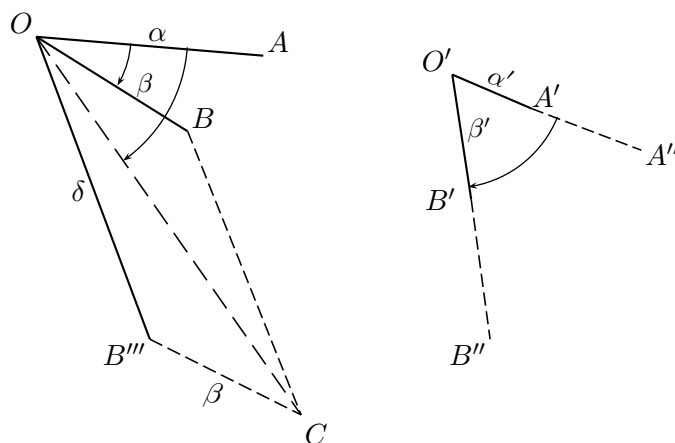
$$\frac{\beta}{\alpha} \pm \frac{\beta'}{\alpha'} = \frac{\delta}{\gamma} \pm \frac{\delta'}{\gamma} = \pm \frac{\delta + \delta'}{\gamma} \dots \dots (1)$$

Hagamos  $\frac{T\alpha}{T\alpha'} = r$  y escribamos:  $\frac{\beta'}{\alpha'} = \frac{r\beta'}{r\alpha'}$ ; si hacemos coincidir los vectores  $\alpha$  y  $\alpha'$ , cosa que siempre será posible por medio de movimientos que no alteren el valor de los cuaternios (29 - b), se tendrá:  $r\alpha' = \alpha$ , y haciendo  $r\beta = \delta$  saldrá:

$$\frac{\beta}{\alpha} \pm \frac{\beta'}{\alpha'} = \frac{\beta}{\alpha} \pm \frac{\delta}{\alpha} = \frac{\beta \pm \delta}{\alpha} \dots \dots (2)$$

Nótese que en (1) el vector  $\gamma$  escogido por denominador común puede ser cualquiera y que, de consiguiente, podemos hacerlo igual á  $\alpha$  y obtener inmediatamente á (2).

La interpretación gráfica de (2) es la siguiente:



Sea  $q = \frac{O'B'}{O'A'} = \frac{\beta'}{\alpha'}$  (figura 2.<sup>a</sup>), y  $q = \frac{OB}{OA} = \frac{\beta}{\alpha}$  (figura 1.<sup>a</sup>)

Multipliquemos los dos términos de  $q$  por  $r = \frac{T\alpha}{T\alpha'}$  y sean  $O'A''$  y  $O'B''$  (figura 2.<sup>a</sup>) los nuevos vectores así obtenidos. Los vectores  $O'A''$  y  $OA$  tendrán entonces una misma longitud, y si trasladamos la figura 2.<sup>a</sup> hasta que el primero de estos vectores coincida con el segundo, y llamamos  $B'''$  el punto correspondiente á  $B''$  tendremos:

$$\frac{OC}{OA} = \frac{\delta + \beta}{\alpha} = \frac{\delta}{\alpha} + \frac{\beta}{\alpha} = \frac{r\beta'}{r\alpha'} + \frac{\beta}{\alpha} = \frac{\beta'}{\alpha'} + \frac{\beta}{\alpha} = q' + q$$

Análoga construcción puede hacerse en el caso de una sustracción, de modo que por *suma* puede entenderse suma algébrica.

Obsérvese que la operación no está limitada á vectores coplanales, pues si no lo son, el vector-denominador  $\alpha$  puede tomarse en la intersección de los planos de ambos cuaternios, conforme vimos en (32 - b), y la construcción anterior se efectúa del mismo modo.

De la conmutabilidad de la suma entre vectores (8 - c) se desprende que la suma de cuaternios es también una operación *conmutativa*. Es evidente que lo expuesto acerca de dos cuaternios se aplica á un número cualquiera de ellos.

(b). En lugar de tomar la relación III como punto de partida de la adición de cuaternios, podemos definir esta operación independiente de dicha relación. En efecto, tomemos un cuaternio cualquiera  $q'' = \frac{OC}{OA}$ ; como  $OC$  es un vector, podemos descomponerlo en la suma de dos vectores  $\beta$  y  $\delta$  (figura 1.<sup>a</sup>) y escribir :  $q'' = \frac{OC}{OA} = \frac{\beta + \delta}{\alpha}$ . Ahora, la inspección de la figura demuestra inmediatamente que efectuando separadamente las dos operaciones  $q = \frac{\beta}{\alpha}$  y  $q' = \frac{\delta}{\alpha}$  se obtiene el mismo resultado que con la ejecución de  $q''$ , puesto que estas dos operaciones engendran los vectores componentes de  $OC$ ; tenemos así dos operaciones parciales  $q$  y  $q'$ , el conjunto de cuyos resultados es el mismo que el resultado de otra operación análoga  $q''$ , y de consiguiente podemos escribir con entera propiedad:  $q + q' = \frac{\beta}{\alpha} + \frac{\delta}{\alpha} = q'' = \frac{\beta + \delta}{\alpha}$  que es la relación III (30 - a).

34. *Cuaternio rectangular*.- Llámese cuaternio *rectangular* aquel cuyo ángulo es recto. En este caso  $x = 1$  y se tiene:  $mi_1 = \frac{\beta}{\alpha}$  (25); pero  $i_1$  es un vector unitario perpendicular al plano de  $\alpha$  y  $\beta$ ;  $mi_1$  es, pues, un vector coincidente en dirección con  $i_1$ , y cuyo *tensor* es  $m$ ; luego *todo cuaternio rectangular puede representarse por medio de un vector perpendicular al plano del cuaternio, y cuya longitud es igual al tensor del cuaternio*.

Por plano de un cuaternio entenderemos siempre el plano de sus vectores.

El símbolo  $i_1$  toma también el nombre de *versor cuadrantal*, porque su efecto es el de hacer girar al divisor en un ángulo recto ó cuadrante.

35. *Cuaternos recíprocos.*— Si se intervienen los términos de un cociente geométrico ó cuaternio, esto es, si el divisor se toma por dividendo éste por aquél, se obtiene un nuevo cuaternio que se llama el *recíproco* del primero. La notación es la misma que la del álgebra; el recíproco del cuaternio  $q$  será, pues,  $\frac{1}{q}$ .

Tenemos, en efecto:

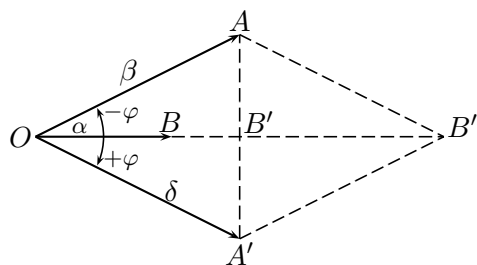
$$1 \div \frac{\beta}{\alpha} = \frac{\alpha}{\alpha} \div \frac{\beta}{\alpha} = \frac{\alpha}{\beta} \text{ (Relación IV.)}$$

Los dos cuaternios  $\frac{1}{ni_1^x} = \frac{a}{b} \cdot \frac{\alpha_1}{\beta_1} = \frac{1}{n} i_1^{-x}$  y  $ni_1^x = \frac{b}{a} \cdot \frac{\beta_1}{\alpha_1}$  son cuaternios recíprocos.

36. *Cuaternos conjugados.*— (a). Dos cuaternios *coplanales*, de tensores iguales y de ángulos iguales en magnitud, *pero de signos contrarios*, se llaman cuaternios conjugados. Tales cuaternios equivalen á dos de la forma:

$$ni_1^x = \frac{b}{a} \cdot \frac{\beta_1}{\alpha_1} \text{ y } ni_1^{-x} = \frac{b}{a} \cdot \frac{\delta_1}{\alpha_1},$$

á las cuales corresponde la figura adjunta, en que  $OB = \alpha = a\alpha_1$ ;  $OA = \beta = b\beta_1$  y  $OA' = \delta = b\delta_1$ .



La notación empleada para designar el conjugado de un cuaternio es la introducida por Hamlton, y consiste en anteponer la letra  $k$  al símbolo del cuaternio; así,  $kq$  represente el conjugado del cuaternio  $q$ .

(b). Si hacemos  $\phi = 0$  ó  $\phi = \pi$  tendremos:  $i_1^x = i_1^{-x}$ , ó bien:  $\beta = \delta$ , lo que nos dice, como debe ser, que ambos vectores se hallan en la línea que pasa por  $O$  y  $B'$ ; pero en este caso,  $\frac{\beta}{\alpha}$  y  $\frac{\delta}{\alpha}$  son escalares; luego un escalar (considerado como limite de un cuaternio) y su conjugado son iguales entre si. Por tanto, si  $a$  es un escalar, podemos escribir:  $ka = a$  :é inversamente, si se tiene  $\beta = k\beta$ , sabremos que  $\beta$  es un escalar.

37. *Suma de conjugados.*— De la figura del §36 tenemos:

$$\frac{\beta}{\alpha} + \frac{\delta}{\alpha} = \frac{\beta + \delta}{\alpha} = \frac{OB''}{OB} = \text{un escalar};$$

luego si  $q$  es un cuaternio cualquiera, de tendrá:

$$q + kq = a \dots \dots (1)$$

en que  $a$  es un escalar positivo ó negativo, según que el ángulo  $\phi$  del cuaternio sea menor ó mayor que  $\frac{\pi}{2}$ .

38. *Degeneración de cuaternio.*- Cuando el valor de un cuaternio se reduce á un escalar, se dice que el cuaternio *degenera*. La dirección de su eje (y de consiguiente la de su plano) es entonces indeterminada, y su ángulo tiene por valor 0 ó  $\pi$ .

Es evidente que puede escribirse:

$$ai_1^0 = a \cdot \frac{\alpha_1}{\alpha_1} = a,$$

lo que conduce á la relación:  $i_1^0 = 1$ , de conformidad con la cual podemos decir que *la unidad es el versor de un escalar*.

39. *Cuaternios opuestos.*-(a). Sean dos cuaternios:

$$\frac{\beta}{\alpha} = q \text{ y } \frac{-\beta}{\alpha} = q'$$

se tiene evidentemente:

$$q' = \frac{-\beta}{\alpha} = \frac{0 - \beta}{\alpha} = \frac{0}{\alpha} - \frac{\beta}{\alpha} = 0 - q = -q.$$

$q$  y  $q'$  difieren por tener signos opuestos y por esto se llaman cuaternios *opuestos*.

(b). Cuaternios opuestos tienen *ejes opuestos y ángulos suplementarios*; un cuaternio y su opuesto son, pues, de la forma:  $ni_1^x$  y  $n(-i_1)^{2-x}$ , ó bien:  $ni_1^x$  y  $ni_1^{-(2-x)}(31 - a.)$

(c). También se tiene como en álgebra:  $q + (-q) = -q + q = 0$ ; esto es, la suma de dos cuaternios opuestos es siempre cero.

(d). Haciendo  $a = 0$  en  $q + kq = a$  (37), se tiene:  $kq = -q$ ; pero este caso corresponde á  $\phi = \frac{\pi}{2}$  (siendo  $\phi$  el ángulo del cuaternio), de donde: *el conjugado y el opuesto de un cuaternio rectangular son iguales entre sí*.

(e). Si en la expresión  $kq = k \cdot ni_1^{\frac{\pi}{2}} = ni_1^{\frac{-\pi}{2}}$  hacemos  $n = 1$  tenemos:

$$kq = i_1^{\frac{-\pi}{2}} = \frac{1}{i_1^{\frac{\pi}{2}}} = \frac{1}{q}$$

Esta relación y lo expuesto en (d) nos dicen que el *conjugado, el opuesto y el recíproco* de un cuaternio *unitario rectangular* son iguales entre sí. Lo mismo se prueba independientemente de la notación de índices.

(f). Escribiendo la igualdad de (d) bajo la forma  $\frac{\beta}{\alpha} + k\frac{\beta}{\alpha} = 0$  se tiene la condición de que los vectores  $\alpha$  y  $\beta$  sean perpendiculares entre sí.

40. *Multiplicación de cuaternios por escalar.*— Sean un escalar  $a$  y un cuaternio  $q = n \frac{\alpha_1}{\beta_1}$ ; cualquiera que sea el valor del versor  $\frac{\alpha_1}{\beta_1}$  es claro que para el efecto de multiplicarlo por una cantidad numérica podemos considerarlo como una unidad concreta con respecto á la cual se tendrá, de consiguiente:  $a \cdot \frac{\alpha_1}{\beta_1} = \frac{\alpha_1}{\beta_1} \cdot a$ , de donde:  $a \cdot q = q \cdot a$ ; esto es, la multiplicación de un cuaternio por un escalar es una operación *conmutativa*.

41. *Multiplicación de dos cuaternios.*— Dos cuaternios cualesquiera  $q = \frac{\beta}{\alpha}$  y  $q' = \frac{\beta'}{\alpha'}$  puede siempre ponerse bajo la forma:  $q = \frac{\beta}{\alpha}$  y  $q' = \frac{\alpha}{\gamma}$ .

En efecto, reduciendo el recíproco de  $q'$  al denominador de  $q$  podremos poner:

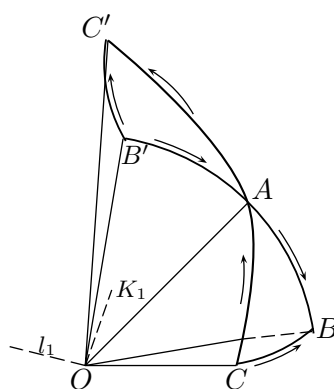
$$\frac{1}{q'} = \frac{\gamma}{\alpha} \therefore q' = \frac{\alpha}{\gamma}.$$

(b). Sean los dos cuaternios reducidos, á la forma anterior  $q = \frac{b}{a} \cdot \frac{\beta_1}{\alpha_1}$  y  $q' = \frac{c}{a} \cdot \frac{\alpha_1}{\gamma_1}$ . De acuerdo con la relación fundamental *IV* tendremos:  $qq' = \frac{b \cdot \beta_1}{a \cdot \alpha_1} \cdot \frac{a \cdot \alpha_1}{c \cdot \gamma_1} = \frac{b \cdot \beta_1}{c \cdot \gamma_1}$ , lo que nos dice que *el tensor del producto de dos cuaternios es igual al producto de sus tensores*; podremos, por tanto, generalizar cuanto se establezca acerca del producto de dos *radiales* con solo multiplicar dicho producto por el de los tensores que se consideren.

IV, (1891),  
pág. 219

(c). La expresión de (b) también nos dice que *el versor del producto es igual al producto de los versores*.

(d). Sean  $q$  y  $q'$  dos cuaternios que, en virtud de lo dicho en (b), supondremos radiales. Sus vectores podrán representarse por los radios de una misma esfera, como lo indica la figura 1.



(Figura 1)

Examinemos primeramente el caso en que  $q$  y  $q'$  no sean coplanales, que es al que se refiere la figura (1), y en lugar de emplear el ángulo recto como unidad, tomemos el arco de cada ángulo por medida de éste.

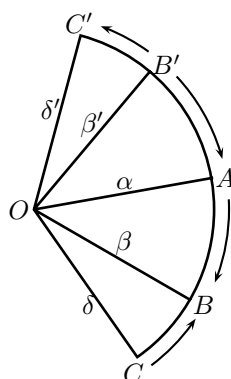
De conformidad con esta notación, sean  $q = \frac{OA}{OC} = i_1^{CA}$  y  $q' = \frac{OB}{OA} = \varepsilon_1^{AB}$ , tendremos:  $q'q = \frac{OB}{OA} \cdot \frac{OA}{OC} = \frac{OB}{OC} = k_1^{CB}$  (Rel.IV) y  $qq' = \frac{OA}{OC} \cdot \frac{OB}{OA}$ . Si hacemos  $AC' = CA = -AC$  y  $AB = B'A = -AB$ , asimilando así estos arcos á vectores curvilíneos, podremos poner:  $q = \frac{OC'}{OA} = i_1^{AC'}$  y  $q' = \frac{OA}{OB'} = \varepsilon_1^{B'A}$ ; de donde (Rel. IV):  $qq' \frac{OC'}{OA} \cdot \frac{OA}{OB'} = \frac{OC'}{OB'} l_1^{B'C'}$ , en que  $l_1$  es diferente de  $k_1$ , por ser estos vectores perpendiculares á dos planos no paralelos; se tendrá por consiguiente (29)  $k_1^{CB} \neq l_1^{B'C'}$ , ó sea:  $qq' \neq q'q$ . Obsérvese que si  $AB$  fuese un cuadrante,  $OB'C'$  y  $O'BC$  estarían en un mismo plano, pero que la desigualdad de los productos siempre subsistiría por tener entonces  $CB$  y  $B'C'$  direcciones opuestas, es decir, por ser dichos productos cuaternios conjugados ó de la forma:  $k_1^{CB}$  y  $k_1^{-CB}$ . Vemos, pues, que, en general, la multiplicación de dos cuaternios no es una operación conmutativa, ó lo que es lo mismo, que el producto depende del orden de los factores (V. 30).

(e). Supongamos ahora á  $q$  y  $q'$  coplanales. Para esto podemos concebir que el sector  $OBB'$  (fig,1) gire al rededor de  $OA$  hasta caer en el plano de  $OCC'$ ; sean  $B$  y  $B'$  (fig,2), las nuevas posiciones de los puntos  $B$  y  $B'$  de la figura 1; despues de la rotación tendremos:

$$q' = \frac{\beta}{\alpha} = \frac{\alpha}{\beta'} = i_1^{B'A} \text{ y } q = \frac{\alpha}{\delta} = \frac{\delta'}{\alpha} = i_1^{CA} = i_1^{AC'}, \text{ de donde:}$$

$$qq' = \frac{\delta'}{\alpha} \cdot \frac{\alpha}{\beta'} = \frac{\delta'}{\beta'} \text{ y } q'q = \frac{\beta}{\alpha} \cdot \frac{\alpha}{\delta} = \frac{\beta}{\delta}; \text{ pero } \frac{\delta'}{\beta'} = \frac{\beta}{\delta}$$

porque arco  $B'C' =$  arco  $CB$  en magnitud y dirección, luego  $qq' = q'q$ ; esto es la multiplicación de dos cuaternios coplanales es conmutativa.



(Figura 2)

(f). El resultado de (e) también se expresa bajo la forma:

$$qq' = i_1^{CA} \cdot i_1^{AB} \cdot i_1^{CA+AB} = i_1^{AB+CA} = i_1^{AB} \cdot i_1^{CA} = q'q$$

IV,(1891),  
pág. 220

Vemos así que en el caso de cuaternios *coplanales* los índices siguen la ley algébrica (31 - c).

(g). Sí  $a$  representa un número y empleamos á 1, 2 etc. como subfijos para designar orden de posición pero no diferencia de símbolos, tendremos  $1_1 + 1_2 + \dots + 1_a = a$ , ó bien:  $a \times 1 = a$ . Cada uno de los primeros miembros de estas dos igualdades representa una operación cuyo resultado es el segundo miembro; según esto, todo número puede considerarse ya sea como *símbolo* del resultado de una operación ejecutada sobre la unidad, tomada por punto de partida, ya sea como símbolo de la *operación misma*.

Sea ahora el producto numérico  $a \times b = c$ ; comparandolo con este otro  $c \times 1 = c$  y asimilando los numeros á *operaciones y resultados* podemos decir que el producto  $c$  se halla ejecutando la operación  $a$  sobre el resultado de la operación  $b$ ; es decir, tomando por punto de partida de  $a$  el resultado de  $b$  en vez de la unidad.

Este modo de concebir la multiplicación numérica hace resaltar la analogía que existe entre ella y la multiplicación de cuaternios, porque de la igualdad cuatérnica  $q'q = q''$  también puede decirse que el resultado  $q''$  se obtiene ejecutando sobre el resultado de  $q$  la operación  $q'$ . En efecto, volvamos á la Figura 2 y ejecutemos la operación  $q$  cuyo resultado debe ser el punto de partida de  $q'$ ; empezaremos, pues, por  $OC$ , vector inicial de  $q$  (este vector puede evidentemente considerarse como el resultado de otra operación análoga á  $q$ ; él constituye el punto común de partida de  $q$  y  $q''$ , así como la unidad lo es á su vez respecto de  $a$  y  $c$ ). Ahora,

el resultado de  $q$  se obtiene describiendo el arco  $CA$  de *derecha á izquierda* de un observador colocando sobre el plano  $OAC$  (exteriormente el triedro esférico  $OABC$ ) y mirando hacia  $A$ , y dicho resultado es el vector  $OA$ ; partiendo, pues, de él y describiendo el arco  $AB$  de  $q'$ , esto es, ejecutando la operación  $q'$ , se llega finalmente el resultado buscado, correspondiente á la operación  $q''$ .

obsérvese que al describir el arco  $AB$ , la dirección del movimiento es también de *derecha á izquierda* con respecto á un observador colocado sobre el plano  $OAB$  (exteriormente el triedro, como se convino antes) y mirando hacia  $A$ ; esto es, que el arco engendrado por  $q'$  guarda con  $OA$ , vector inicial de  $q'$  la misma relación que el arco engendrado por  $q$  guarda con  $OC$ , vector inicial de  $q$ , lo cual tiene su análogo en  $a : 1 = c : b$ .

Lo que antecede nos permite escribir:

$$q'q = \frac{OB}{OC} = \frac{OB}{OA} \cdot \frac{OA}{OC}$$

que es la relación  $IV$  (30 - a).

Veamos lo que ocurre con la expresión  $qq' = q''$ , empezando por  $OA$ , vector inicial de  $q'$ , se llega á  $OB$ ; pero como este vector se halla situado en un plano diferente y no paralelo al plano de  $q$ , se sigue que partiendo de  $OB$  no es posible practicar la operación  $q$ ; la solución se obtiene trasladando los vectores de  $q'$  á las nuevas posiciones  $OB'$  y  $OA$  (29-b). Esto hecho, podemos partir de  $OA$  resultado de  $q'$ , y engendrar el vector  $OC'$  por medio de una rotación *en el plano de  $q$* , es decir, ejecutando la operación  $q$ .

En los párrafos anteriores hemos supuesto radiales los cuaternios  $q$  y  $q'$ ; pero la analogía que hemos señalado entre las dos operaciones relativas á números y á cuaternios se extiende sin dificultad al caso de cuaternios cuyos tensores sean cualesquiera.

(h). De lo expuesto (d) se desprende que para que la multiplicación entre dos cuaternios sea una operación determinada es necesario fijar el orden que deben ocupar los factores. Esto se indica por medio del signo  $x$  pospuesto ó antepuesto al símbolo del cuaternio por el cual se quiere multiplicar; así el producto de  $q$  por  $\times q'$  será  $qq'$ , y el de  $q$  por  $q' \times$  será  $q'q$ .

(i). Nótese que  $\frac{\alpha}{\beta} \cdot \frac{\beta}{\delta} = \frac{\alpha}{\delta}$  equivale á cancelar factores de derecha á izquierda, pero que también puede convenirse en cancelar de izquierda á derecha; lo esencial es que, al tratarse de cuaternios *no coplanales*, la cancelación se ejecute tan sólo en sentido determinado.

42. *Producto de conjugados.*-(a). Sean dos radiales puestos bajo la forma:

$$q = \frac{\alpha}{\delta} \text{ y } q' = \frac{\delta}{\beta};$$

por tratarse de radiales tenemos (36 - c) :

$$kq = \frac{\delta}{\alpha} \text{ y } kq' = \frac{\beta}{\delta}.$$

También se tiene:

$$k(qq') = k\left(\frac{\alpha}{\delta} \cdot \frac{\delta}{\beta}\right) = k\frac{\alpha}{\beta} = \frac{\beta}{\alpha} = \frac{\beta}{\delta} \cdot \frac{\delta}{\alpha} = kq' \cdot kq,$$

de donde: *el conjugado del producto de dos cuaternios es igual al producto de los conjugados tomados en general, en orden inverso.*

(b). En lugar de  $k(qq')$ , que indica el conjugado de un producto, escribiremos en adelante  $k.qq'$ , y en lugar de  $(kq).q'$ , que es el producto de un conjugado por otro cuaternio, pondremos  $kq.q'$ , en que el punto hace las veces del paréntesis: lo mismo haremos en formas semejantes, aunque no se refieran al símbolo  $k$ .

(c). Si los cuaternios son coplanales, se tendrá:  $kq q' = kq.kq' = kq'.kq$ , puesto que siendo coplanales también los conjugados, la multiplicación es conmutativa (41 - e).

IV.(1891),  
pág. 222

(d). De  $q = \frac{\beta}{\alpha} = m \cdot \frac{\beta_1}{\alpha_1}$  se tiene:  $kq = km \frac{\beta_1}{\alpha_1} = mk \frac{\beta_1}{\alpha_1} = m \frac{\alpha_1}{\beta_1}$  (39 - c), de donde:  $qkq = m \frac{\beta_1}{\alpha_1} \cdot m \frac{\alpha_1}{\beta_1} = m^2 \cdot \frac{\beta_1}{\alpha_1} \cdot \frac{\alpha_1}{\beta_1} = m^2 \frac{\beta_1}{\beta_1} = m^2$ ; es decir *el producto de un cuaternio por su conjugado es igual al cuadrado del tensor común á ambos.*

La relación  $km \frac{\beta_1}{\alpha_1} = mk \frac{\beta_1}{\alpha_1}$  que hemos empleado arriba, se desprende inmediatamente de la definición de conjugados.

43. *Producto de recíprocos.* - (a) La relación IV nos da, como ya hemos visto:  $\frac{\beta}{\alpha} \cdot \frac{\alpha}{\beta} = \frac{\beta}{\beta} = 1$ ; esto es, el producto de dos cuaternios recíprocos es igual á la unidad positiva, lo cual concuerda con esta otra forma:  $\frac{1}{n} i^{-x} \cdot n i^x = \frac{n}{n} \cdot i^{x-x} = i^0 = 1$ , como si se tratase de cantidades algébricas (V. 38).

(b). Empleando la letra  $R$  como distintivo de los cuaternios recíprocos, tendremos (42 - a):  $Rq q' = Rq'.Rq$ ; y en el caso de cuaternios coplanales:  $Rq q' = Rq'.Rq = Rq.Rq'$ .

44. *Cuadrado de un cuaternio.* - (a). Si  $q_1 = \frac{\beta_1}{\alpha_1}$  es rectangular, se tiene (39 - e):  $q_1 = -\frac{\alpha_1}{\beta_1}$ , de donde:  $q_1^2 = \frac{\beta_1}{\alpha_1} \cdot \frac{\alpha_1}{-\beta_1} = -\frac{\beta_1}{\beta_1} = -1$ , lo que nos dice que *el cuadrado de un cuaternio unitario rectangular, ó sea de un versor cuadrantal, es igual á la unidad negativa*; luego para un cuaternio cualquiera rectangular se verifica (41 - b);  $q^2 = -(Tq)^2$ , ó bien: *el cuadrado de un cuaternio rectangular es igual*

á menos el cuadrado de su tensor.

(b). Estos resultados están de acuerdo con la notación de índices, según la cual  $i_1^{2x}$  representa dos rotaciones al rededor del eje  $i_1$ , cada una igual  $x$ ; si  $x$  denota un ángulo recto, se tendrá:  $x = 1$  y  $i_1^{2x} = i_1^2$ ; el oficio del versor  $i_1^2$  es, pues, hacer girar al vector inicial en dos ángulos rectos, ó sea *invertir* su dirección de donde se desprende la relación  $i_1^2 = \frac{-1}{1} = -1$ .

Lo mismo se deduce de la relación (10) de (31 - b); en efecto, de  $-i_1^x = i_1^{2+x}$  se tiene:  $-i_1^x = i_1^2 \cdot i_1^x \therefore i_1^2 = -1$ .

(c). De  $q = ni_1^x$  y  $kq = ni_1^{-x}$  sale:  $q^2 = n^2 \cdot i_1^{2x}$  y  $(kq)^2 = n^2 \cdot i_1^{-2x}$  ó bien: *el cuadrado del conjugado es igual al conjugado del cuadrado*.

(d). Sea  $q = \frac{\beta}{\alpha} = ni_1^x$ ; se tiene:

$$-q = -\frac{\beta}{\alpha} = n(-i_1)^{2-x} \text{ y } (-q)^2 = n^2(-i_1)^{2(2-x)} = n^2(-i_1)^4 \cdot i_1^{2x};$$

pero el índice 4 representa 4 ángulos rectos, y de consiguiente  $(-i_1)^4$  indica una revolución completa del radio inicial, de donde:  $(-i_1)^4 = 1$  y  $(-q)^2 = n^2 \cdot i_1^{2x} = q^2$ , como en álgebra.

(e). De  $i_1^2 = -1$  y  $i_1^4 = +1$  se sigue:  $i_1^{4n+2} = -1$  y  $i_1^{4n} = +1$ , en que  $n$  representa un número entero, ó bien:

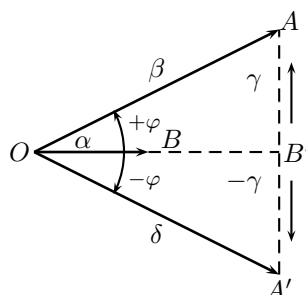
$$i_1^{(2n+1)\pi} = -1 \quad \text{y} \quad i_1^{2n\pi} = +1$$

por donde vemos que si el ángulo de un versor es un múltiplo de dos ángulos rectos, el versor tiene por valor la unidad positiva ó la unidad negativa, según el factor de  $\pi$  sea par ó impar, siendo entero dicho factor.

(f). Hemos visto que dos radiales, *rectangulares y no coplanales*, tienen un producto de la forma  $q'q = \kappa_1^{CB}$  y  $qq' = \kappa_1^{-CB}$  (41 - d); si suponemos que los coplanales de  $q$  y  $q'$  se cortan ortogonalmente, se verifica que  $q'q = \kappa_1$  y  $qq' = \frac{1}{\kappa_1}$ , de donde:  $(q'q)^2 = \kappa_1^2 = -1$  y  $(qq')^2 = \frac{1}{\kappa_1^2} = \frac{1}{-1} = -1$ , ó bien:  $(q'q)^2 = (qq')^2$ . También tenemos:  $q^2 \cdot q'^2 = (-1) \times (-1) = +1 \therefore q^2 \cdot (q'_1)^2 = -(qq')^2$ .

Las relaciones anteriores nos dicen que la operación representada por el *producto de dos cuadrados de dos versores* cuadrantales situados en planos perpendiculares entre sí, restituye al radio inicial su posición primitiva, mientras que la operación indicada por *el cuadrado del producto* invierte dicha dirección ó la coloca en sentido opuesto.

45. *Descomposición de cuaternios.*— Sean  $q = \frac{\beta}{\alpha}$  y  $kq = \frac{\delta}{\alpha}$  y hagamos  $B'A = \gamma$  y  $B'A' = -\gamma$ .



Según (37) tenemos:

$$\frac{\beta}{\alpha} + \frac{\delta}{\alpha} = 2 \cdot \frac{OB'}{\alpha}; \text{ pero } \delta = OB' - \gamma \therefore \frac{\beta}{\alpha} + \frac{OB'}{\alpha} - \frac{\gamma}{\alpha} = 2 \cdot \frac{OB'}{\alpha},$$

de donde:

$$\frac{\beta}{\alpha} = q = \frac{OB'}{\alpha} + \frac{\gamma}{\alpha} \dots \dots (1)$$

Ahora,  $\frac{OB'}{\alpha}$  es un escalar, y  $\frac{\gamma}{\alpha}$  un cuaternio rectangular, luego todo cuaternio puede descomponerse en la suma de un escalar y de un cuaternio rectangular, ó bien en una parte real ó álgebra y en otra simbólica ó vectorial.

La parte escalar de un cuaternio se indica anteponiendo á éste la letra  $S$ , y la vectorial anteponiéndole la letra  $V$ ; de acuerdo con esta notación se tiene la relación general:

$$q = Sq + Vq \dots \dots \dots (2)$$

También se tiene:

$$\frac{\delta}{\alpha} = kq = \frac{OB'}{\alpha} - \frac{\gamma}{\alpha}, \text{ ó sea:}$$

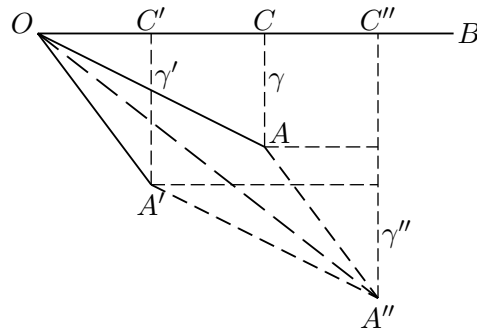
$$kq = Sq - Vq \dots \dots \dots (3)$$

Estas dos últimas expresiones son de grande importancia en la teoria de los cuaternios.

Con respecto á la suma de un número cualquiera de cuaternios, se verifica evidentemente:

$$\Sigma q = S\Sigma q + V\Sigma q \dots \dots \dots (4)$$

*Operación de tomar partes escalares y partes vectoriales.*



Sean  $q = \frac{OA}{OB}$  y  $q' = \frac{OA'}{OB}$ ; entonces  $Sq = \frac{OC}{OB}$  y  $Sq' = \frac{OC'}{OB}$ , de donde:  
 $Sq + Sq' = \frac{OC + OC'}{OB} = \frac{OC''}{OB}$ ; pero  $\frac{OC''}{OB} = S(q + q')$   
 $\therefore S(q + q') = Sq + Sq' \dots \dots (1)$

También se tiene:

$$Vq = \frac{\gamma}{OB} \text{ y } Vq' = \frac{\gamma'}{OB} \therefore Vq + Vq' = \frac{\gamma + \gamma'}{OB} = \frac{\gamma' + \gamma''}{OB} = \frac{C''A''}{OB}$$

$$\therefore V(q + q') = Vq + Vq' \dots \dots (2)$$

Las relaciones (1) y (2) son generales y se aplican al caso de cuaternios coplanales ó no; en este último caso la diferencia consiste en que el vector común  $OB$ , en lugar de ser coplanal con  $OA$  y  $OA'$  á la vez, esta situado en la intersección de los planos  $AOB$  y  $A'OB$ . Las referidas relaciones pueden, además, generalizarse hasta hacer que se refieran á un número cualquiera de cuaternios con sólo descomponer á  $q$  y á  $q'$  en dos sumandos; cada uno de éstos en otros dos, y así indefinidamente; de modo que *la operación de tomar partes escalares y partes vectoriales de una suma cualquiera de cuaternios es distributiva*, ó bien, simbólicamente:

$$S \sum q = \sum Sq \quad \text{y} \quad V \sum q = \sum Vq \dots \dots (3)$$

47. *Propiedad distributiva del símbolo k.*— La relación (3) del §45 y la (3) del §46 nos dan:

$$k \sum_n^1 q = \sum_n^1 Sq - \sum_n^1 Vq = Sq_1 - Vq_1 + Sq_2 - Vq_2 + \dots \dots + Sq_n - Vq_n$$

ó sea:  $k \sum q = \sum kq$ .

48. *Propiedad distributiva de la multiplicación.*— Sean  $q_1, q_2$  y  $q_3$  tres cuaternios rectangulares cualesquiera; por ser rectangulares podemos asimilarlos á vectores (34) y escribir:

$$(q_1 + q_2) \cdot \frac{1}{q_3} = \frac{q_1}{q_3} + \frac{q_2}{q_3} \text{ (Relación III);}$$

suponiendo  $q = \frac{1}{q_3}$ , se obtiene:

$$(q_1 + q_2)q = q_1q + q_2q \dots \dots (1)$$

lo que nos dice que la multiplicación es distributiva con respecto al *multiplicando*; mas como los cuaternios pueden ser cualesquiera, la relación (1) es aplicable á sus conjugados; de donde:

$$(kq_1 + kq_2).kq = kq_1.kq + kq_2.kq = k.qq_1 + k.qq_2; \text{ pero } (kq_1 + kq_2).kq = k.(q_1 + q_2).kq = k.q(q_1 + q_2) \therefore k.q(q_1 + q_2) = k.qq_1 + k.qq_2$$

y tomando conjugados:

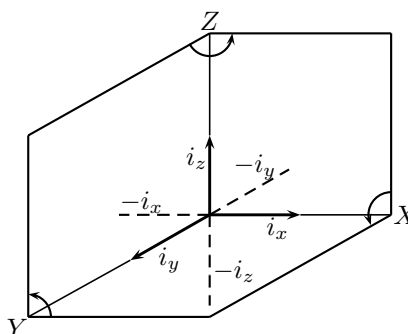
$$q(q_1 + q_2) = qq_1 + qq_2 \dots \dots (2);$$

luego la multiplicación es también distributiva con respecto al *multiplicador*.

Si en lugar de cuaternios rectangulares tomamos otros cualesquiera, tendremos:  $q' \sum q = (Sq' + Vq').(\sum Sq + \sum Vq)$ ; y como los términos de los factores del segundo miembro son escalares ó cuaternios rectangulares, se sigue que la ley distributiva es aplicable al caso general:

$$q' \sum q = \sum q'q \quad \text{y} \quad \sum q.q' = \sum qq'.$$

49. *Multiplicación de vectores rectangulares.*— (a). Sean los tres vectores unitarios  $i_x, i_y$  y  $i_z$ , y sus opuestos  $-i_x, -i_y, -i_z$  situados según los tres ejes de coordenadas ortogonales, razón por la cual los llamaremos vectores *rectangulares*.



Supongamos positivas las rotaciones efectuadas de derecha a izquierda con respecto á un observador que mira hacia el origen y que se halla colocado sobre el vector que sirve de eje; esto es:

$$\text{sean positivas: } \left\{ \begin{array}{llll} \text{la rotación del plano } & zx & \text{hacia el} & yx. \\ \text{"} & \text{"} & \text{"} & \text{"} & yx & \text{"} & \text{"} & yz. \\ \text{"} & \text{"} & \text{"} & \text{"} & yz & \text{"} & \text{"} & zx. \end{array} \right.$$

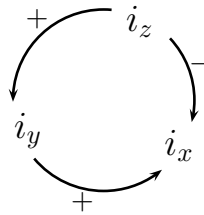
De acuerdo con las relaciones *A* y *B* del §31 se tiene:

$$A \begin{cases} i_y i_z = -i_x \dots\dots (1). \\ i_z i_y = +i_x \dots\dots (2). \\ i_y i_x = +i_z \dots\dots (3). \\ i_x i_y = -i_z \dots\dots (4). \\ i_z i_x = -i_y \dots\dots (5). \\ i_x i_z = +i_y \dots\dots (6). \end{cases}$$

IV,(1891),  
pág. 249

En este grupo vemos que la multiplicación no es conmutativa, como debe ser, por cuanto cada uno de estos vectores puede representar un cuaternio rectangular, y ya sabemos que el producto de cuaternios no coplanales depende del orden de los factores.

Vemos también que el signo + corresponde al caso en que los factores estén colocados en el orden cíclico  $i_z i_y i_x$ , y que el signo - corresponde al orden inverso  $i_z i_x i_y$ , como lo indica la figura.



(b). De (1) y (3), de (2) y (5) y de (4) y (6) se obtiene:

$$\begin{aligned} i_y^2 &= \frac{-i_x}{i_z} \cdot \frac{i_z}{i_x} = -\frac{i_x}{i_x} = -1 \\ i_z^2 &= \frac{i_x}{i_y} \cdot \frac{(-i_y)}{i_x} = -\frac{i_x}{i_x} = -1 \\ i_x^2 &= \frac{-i_z}{i_y} \cdot \frac{i_y}{i_z} = -\frac{i_z}{i_z} = -1 \end{aligned}$$

relaciones que están de acuerdo con lo hallado en el §44, lo mismo que estas otras:

$$\begin{aligned} i_z i_y i_x = i_y i_x i_z = i_x i_z i_y = i_z^2 = i_y^2 = i_x^2 = -1 \dots\dots (1'). \\ i_y i_z i_x = i_x i_y i_z = i_z i_x i_y = i_z^4 = i_y^4 = i_x^4 = +1 \dots\dots (2'). \end{aligned}$$

De (1') sale:

$$i_x^2 i_y^2 i_z^2 = (-1) \cdot (-1) \cdot (-1) = -1,$$

y de (2'):

$$(i_x i_y i_z)^2 = +1,$$

de donde:

$$i_x^2 i_y^2 i_z^2 = -(i_x i_y i_z)^2; \text{ (V. 44 - f)}$$

La relación (1') sirvió de base á Hamilton en la primera exposición que hizo de su teoría de los cuaternios (*Elements of Quaternions*).

Si en (1') y (2') hacemos  $y = 1, z = 2$  y  $x = 3$ , resulta:

$$\begin{aligned} i_1 i_2 i_3 &= i_3 i_1 i_2 = i_2 i_3 i_1 = +1 \\ i_2 i_1 i_3 &= i_1 i_3 i_2 = i_3 i_2 i_1 = -1 \end{aligned}$$

por donde vemos que los signos son + ó - según el número de inversiones de los índices es par ó impar, como en la teoría de las Determinantes.

(c). Si por  $i$  representamos un vector unitario cualquiera, y por  $a$  un escalar, tendremos:  $ai =$  un vector; si llamamos  $\alpha$  este vector, se tiene:  $\alpha^2 = a^2 i^2 = a^2(-1) = -a^2$ , que da la relación hallada en el §44 - a.

50. *La multiplicación de los símbolos de  $i_x i_y i_z$  es una operación asociativa.*

Del grupo A (49) se saca:

$$i_x i_z i_x i_z i_y = (i_x i_z)(i_x i_z)(i_z i_y) = i_y i_y i_x = i_y^2 i_x = (-1)i_x = -i_x \dots \dots (1)$$

$$(i_x i_z i_x)(i_z i_z) i_y = i_x i_z i_x (-1) i_y = i_x i_z i_x (-i_y) = i_y I_z (-i_y) = i_y i_z = -i_x \dots (2)$$

Al mismo resultado se llega cualquiera que sea el modo de hacer el agrupamiento, con tal que se conserve el orden de sucesión de los factores desiguales; se ve igualmente que el número de factores puede ser el que se quiera, de donde se deduce que la operación es *asociativa* como la multiplicación común.

51. *Expresión trigonométrica de un cuaternio.*—Yá hemos observado que la parte vectorial de un cuaternio, por ser un cuaternio rectangular, puede reemplazarse por un vector; hagamos ahora, con referencia á la figura del §45,  $\frac{T\gamma}{T\alpha} = m$

y  $\frac{\gamma_1}{\alpha_1} = \varepsilon_1$ , y se tendrá:

$$q = Sq + m\varepsilon_1 \dots \dots (1)$$

Si hacemos  $T\alpha = T\beta$  será  $\frac{OB'}{\alpha} = \cos \phi$  y  $m = \sin \phi$  (siendo  $\phi$  el ángulo del cuaternio); pero  $\frac{OB'}{\alpha} = Sq$ , de donde, llamando  $q_1$  á  $\frac{\beta_1}{\alpha_1}$ :

$$q_1 = \cos \phi + \varepsilon_1 \sin \phi \dots \dots (2).$$

Esta última es la expresión de un cuaternio radial ó unitario, luego la de un cuaternio cualquiera será:

$$q = Tq.(\cos \phi + \varepsilon_1 \sin \phi) \dots \dots (3)$$

Recuérdese que  $\varepsilon_1$  es un vector unitario perpendicular al plano de  $q$ , ó lo que es lo mismo, un versor cuadrantal; de modo que si por él se multiplica á un vector  $\alpha$ , este vector gira en un ángulo recto, en el sentido positivo, sobre un plano perpendicular á  $\varepsilon_1$ .

Yá dijimos que la relación (2) representa un *versor*; el oficio de este versor es hacer girar en un ángulo  $\phi$ ; de modo que podemos poner:

$$\cos \phi + \varepsilon_1 \sin \phi = \frac{\beta_1}{\alpha_1} = \varepsilon_1^{\frac{2\phi}{\pi}}$$

Si hacemos en (3)  $\phi = \frac{\pi}{2}$  se tiene:  $q = Tq.\varepsilon_1$ , lo que nos dice que la parte escalar de un cuaternio rectangular es *nula*, como también se ve inspeccionando la figura del §45 ó bien considerando que, por ser rectangular, el cuaternio puede representarse por un *vector* y que por un vector no tiene parte escalar.

Obsérvese que en la relación (3) los vectores del cuaternio no están referidos á ningún eje de coordenadas; lo único que dicha relación fija es la dirección del plano de los vectores, que debe ser perpendicular á  $\varepsilon_1$  (V. 29 - b).

52. *Multiplicación de vectores en general.* - (a). Resumamos la relación (3) de arriba, haciendo  $Tq = T\frac{\delta}{\alpha} = \frac{c}{a}$ ; esto nos da:

$$\frac{\delta}{\alpha} = \frac{c}{a}(\cos \phi + \varepsilon_1 \sin \phi), \text{ de donde (Relación I.):}$$

$$\delta = \frac{c}{a}(\cos \phi + \varepsilon_1 \sin \phi)\alpha = \frac{c}{a}(\alpha \cos \phi + \varepsilon_1 \alpha \sin \phi);$$

multiplicando por  $\alpha$  sale:

$$\delta\alpha = \frac{c}{a}(\alpha^2 \cos \phi + \varepsilon_1 \alpha^2 \sin \phi) = \frac{c}{a}(-a^2 \cos \phi - \varepsilon_1 a^2 \sin \phi) \quad (49 - c)$$

ó bien:

$$\delta\alpha = -ca(\cos \phi + \varepsilon_1 \sin \phi) \dots \dots (1)$$

Si en lugar de multiplicar por  $\alpha$  multiplicamos por  $\alpha \times$ , se obtiene:

$$\alpha\delta = \frac{c}{a}\alpha(\alpha \cos \phi + \varepsilon_1 \alpha \sin \phi) = \frac{c}{a}(\alpha^2 \cos \phi + \alpha\varepsilon_1 \alpha \sin \phi);$$

pero  $\alpha$  y  $\varepsilon_1$  son perpendiculares entre sí, y de consiguiente,  $\alpha_1\varepsilon_1\alpha_1 = \varepsilon_1$  y  $\alpha\varepsilon_1\alpha = a^2\varepsilon_1$ , de donde:

$$\alpha\delta = ca(-\cos \phi + \varepsilon_1 \sin \phi) \dots \dots (2)$$

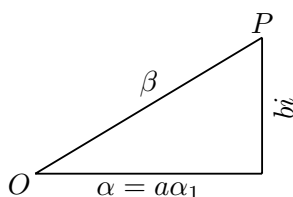
Por (1) y (2) vemos que el producto de dos vectores, al igual del de dos cuaternios, varía con el orden de los factores; la diferencia consiste en el signo de la parte vectorial, el cual depende de la dirección del movimiento. Así,  $V\alpha\beta$

tendrá el signo + si se considera positivo el movimiento de  $\alpha$  á  $\beta$ , y el signo - si se toma positiva la dirección del movimiento de  $\beta$  á  $\alpha$ .

(b). Sea un triángulo rectángulo. Aplicando la relación (1) del §51 se obtiene:

$$\frac{\beta}{\alpha} = \frac{\alpha}{\alpha} + \frac{b}{a}\varepsilon_1 = 1 + \frac{b}{a}\varepsilon_1, \text{ ó sea:}$$

$$\beta = a\alpha_1 + b\varepsilon_1\alpha_1 \dots\dots (3)$$



Recordando que  $\varepsilon_1$  es perpendicular al plano de  $\alpha$  y  $\beta$ , y que  $i$  representa en la figura un vector unitario, se tiene:

$$\varepsilon_1\alpha_1 = i \therefore \beta = a\alpha_1 + b i \dots\dots (4)$$

Apesar de que (3) y (4) se refieren á un mismo vector, obsérvese que no por eso tienen idéntica interpretación; el segundo término del segundo miembro de (3) representa, en efecto, la operación de hacer girar al vector  $b\alpha_1$ , en un ángulo recto en un plano normal á  $\varepsilon_1$ , mientras que  $b i$  en (4) representa el *resultado* de dicha operación.

También puede escribirse:

$$\beta = a + b i \dots\dots (5)$$

La supresión del factor  $\alpha_1$ , que solo afecta á uno de los términos de (4), podrá parecer extraña, pero es lícita; en efecto,  $\alpha_1$  es un símbolo de dirección y no de cantidad, siendo su único oficio el de particularizar el lugar geométrico con respecto al cual se ejecuta la operación que indica el versor  $\varepsilon_1$  en (3), señalando como tal á una cualquiera de las rectas paralelas cuyo símbolo directivo es  $\alpha_1$ ; pero como este símbolo es indeterminado, podemos suprimirlo y obtener así (5); ó en otros términos: al suprimir á  $\alpha_1$  prescindimos de la dirección del vector  $a\alpha_1$  y lo designamos por su longitud  $a$ , como en la geometría analítica.

Obsérvese, sin embargo, que suprimiendo á  $\alpha_1$  pasamos del algoritmo de los cuaternios al de las cantidades llamadas complejas, cuya forma usual reconocerá el estudiante en la relación (5).

La parte simbólica  $b i$  afecta la misma forma que las cantidades imaginarias del Algebra, porque de  $i^2 = -1$  sale algébricamente:  $i = \sqrt{-1}$ ; tomando, pues,

IV.(1891),  
pág. 252

á  $i$  como unidad de las cantidades imaginarias, se obtiene la interpretación geométrica de este célebre símbolo. Sustituyendo por  $i$  su valor  $\sqrt{-1}$  y haciendo  $\beta = OP$ , en que  $O$  representa el origen de coordenadas rectangulares y  $P$  un punto cualquiera del plano, la relación (5) da:

$$OP = a + b\sqrt{-1} \dots \dots (6),$$

en donde  $\sqrt{-1}$  representa un vector unitario cuya dirección es perpendicular á uno de los ejes de coordenadas, ó sea coincidente con la del otro.

En resumen, podemos decir que (3) representa la expresión *cuatérnica*, (4) la expresión *vectorial* y (5) la expresión *compleja* de un mismo vector.

53. *Interpretación de  $V.\alpha\beta$  y  $S.\alpha\beta$ .*— (a) Las relaciones (1) y (2) del §52 nos dan:  $V.\alpha\beta = \pm ab \sin \phi \varepsilon_1$  y  $S.\alpha\beta = -ab \cos \phi$ , por donde se ve que el coeficiente de  $\varepsilon_1$  representa el área del paralelogramo construido con los lados  $a$  y  $b$ , que comprende el ángulo  $\phi$ ; según esto  $T.V(OA.OB) = \pm 2$  veces el área del triángulo  $OAB$ , empleándose el signo  $+$  si la dirección del movimiento se considera positiva de  $OA$  á  $OB$ , y el signo  $-$  si la referida dirección es negativa.

(b). Una superficie puede así representarse por medio de un vector perpendicular á su plano y cuyo tensor exprese tantas unidades lineales cuantas sean las unidades superficiales que contenga aquélla; lo anterior conduce también á la consideración de superficies afectadas de los signos  $+$  y  $-$ . Por ejemplo: un triángulo  $OAB$  puede imaginarse descrito ó engendrado por una línea  $OP$  de longitud variable, cuya extremidad  $P$  describe la línea  $AB$ , ya sea en el sentido de  $A$  á  $B$ , ya sea en el sentido opuesto; en el primer caso podemos representar la superficie del triángulo por  $OAB$  y en el segundo por  $OBA$ , y obtendremos así dos superficies iguales pero de signos contrarios.

(c). Por la expresión  $S.\alpha\beta = -ab \sin(90^\circ - \phi)$  vemos que la parte escalar del producto de dos vectores es igual, *en valor absoluto*, al área del paralelogramo construido con los lados  $a$  y  $b$ , iguales á los tensores de los vectores, de modo que encierren un ángulo igual al complemento de los vectores.

(d). Si llamamos  $P\alpha$  el vector igual á la proyección de  $\beta$  sobre  $\alpha$  y  $P\beta$  el que corresponde á la de  $\alpha$  sobre  $\beta$ , se tiene:

$$S\alpha\beta = \alpha P\alpha = \beta P\beta$$

54. *Formulario elemental.*— Las fórmulas que siguen son de interés práctico; estas fórmulas ó han sido ya demostradas en los artículos presentes, ó bien se desprenden inmediatamente de ellos.

$$f_1 \dots S\alpha^2 = \alpha^2 = -(T\alpha)^2.; V\alpha^2 = 0.$$

$$f_2 \dots S.Vq = 0$$

- $f_3 \dots Sq = Tq.Sq_1$  (aquí y en lo que sigue  $q_1$  representa *el versor de q*).
- $f_4 \dots Sq = -Tq.\cos\phi$  (aquí y en adelante  $\phi$  representa el ángulo entre los vectores).
- $f_5 \dots Sxq = xSq$  (en que  $x =$  un escalar).
- $f_6 \dots S.kq = Sq$
- $f_7 \dots Sq = \frac{1}{S^{\frac{1}{q}}}$
- $f_8 \dots S.q^2 = (Sq)^2 + (Vq)^2.$
- $f_9 \dots V.q^2 = 2Sq.Vq.$
- $f_{10} \dots T.Vq = Tq.\text{sen}\phi.$
- $f_{11} \dots (Sq)^2 + (T.Vq)^2 = (Sq)^2 - (Vq)^2 = (Tq)^2.$
- $f_{12} \dots (Tq)^2 = 2(Sq)^2 - S.q^2.$
- $f_{13} \dots q.kq = (Sq)^2 - (Vq)^2.$
- $f_{14} \dots Sq.q' = S.q'q.$
- $f_{15} \dots V.Sq = 0$
- $f_{16} \dots V.kq = -Vq$
- $f_{17} \dots Vxq = xVq$  (en que  $x =$  un escalar).
- $f_{18} \dots Vq = Tq.Vq_1.$
- $f_{19} \dots k.Vq = -Vq.$
- $f_{20} \dots (Vq)^2 = -(T.Vq)^2.$
- $f_{21} \dots q + kq = 2Sq.$
- $f_{22} \dots q - kq = 2Vq.$
- $f_{23} \dots qkq = (Tq)^2.$
- $f_{24} \dots \alpha\beta = S\alpha\beta + V\alpha\beta.$
- $f_{25} \dots S\alpha\beta = S\beta\alpha = -T\alpha.T\beta.\cos\phi.$
- $f_{26} \dots V\alpha\beta = -V\beta\alpha = \pm T\alpha.T\beta.\sin\phi.\varepsilon_1; TV\alpha\beta = \pm T\alpha.T\beta.\sin\phi.$
- $f_{27} \dots S\frac{\alpha}{\beta} = \frac{T\alpha}{T\beta}.\cos\phi = \left(\frac{T\alpha}{T\beta}\right)^2 S\frac{\beta}{\alpha}.$
- $F_{28} \dots V\frac{\alpha}{\beta} = \frac{T\alpha}{T\beta}.\sin\phi.\varepsilon_1 = \left(\frac{T\alpha}{T\beta}\right)^2 V\frac{\beta}{\alpha}.$
- $f_{29} \dots (S\alpha\beta)^2 + (T.V\alpha\beta)^2 = (T\alpha)^2.(T\beta)^2 = \alpha^2\beta^2.$
- $f_{30} \dots \alpha\beta + \beta\alpha = 2S\alpha\beta = 2S\beta\alpha.$
- $f_{31} \dots \alpha\beta - \beta\alpha = -2V\beta\alpha.$
- $f_{32} \dots (\alpha + \beta)^2 = (\alpha + \beta)\alpha + (\alpha + \beta)\beta = \alpha^2 + 2S\alpha\beta + \beta^2 = 2S\alpha\beta - \{(T\alpha)^2 + (T\beta)^2\}$
- $f_{33} \dots (\alpha - \beta)^2 = \alpha^2 - 2S\alpha\beta + \beta^2 = -\{(T\alpha)^2 + 2S\alpha\beta + (T\beta)^2\}.$
- $f_{34} \dots (\alpha + \beta).\alpha - \beta = \alpha^2 - \beta^2 + 2V\beta\alpha = (T\beta)^2 - \{(T\alpha)^2 + 2V\alpha\beta\}.$

$$f_{35} \dots (\alpha\beta)^2 = (T\alpha)^2 \cdot (T\beta)^2 (\cos 2\phi - \varepsilon_1 \sin 2\phi); \quad \text{si } \phi = \frac{\pi}{2},$$

$$(\alpha\beta)^2 = -(T\alpha)^2 \cdot (T\beta)^2 \quad (V. f_{29})$$

$$f_{36} \dots \left(\frac{\beta}{\alpha}\right)^2 = \frac{(T\beta)^2}{(T\alpha)^2} \cdot (\cos 2\phi + \varepsilon_1 \sin 2\phi); \quad \text{si } \phi = \frac{\pi}{2}, \quad \left(\frac{\beta}{\alpha}\right)^2 = -\left(\frac{T\beta}{T\alpha}\right)^2$$

Obsérvese que  $f_{36}$  está de acuerdo con la notación  $q^2 = (ni_1^\phi)^2 = n^z i_1^{2\phi}$ , en que, como se ve, se halla indicado el doble ángulo.

$$f_{37} \dots \beta\alpha = -\alpha^2 \left\{ S\frac{\beta}{\alpha} + V\frac{\beta}{\alpha} \right\}$$

55. *Teorema.*— Siempre que se tenga un polinomio de la forma:

$$\Sigma a \pm \Sigma \alpha = 0 \dots \dots (1).$$

en que  $\Sigma a$  representa una suma de escalares y  $\Sigma \alpha$  otra de vectores, se verifica necesariamente que:

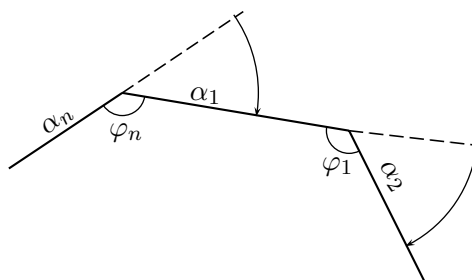
$$\Sigma a = 0 \dots \dots (2), \quad \text{y} \quad \Sigma \alpha = 0 \dots \dots (3).$$

En efecto, si esto no sucede, se tendrá por resultado un *escalar* igual á un *vector*, lo cual no es posible; luego (2) y (3) son consecuencias obligadas de (1).

Obsérvese que lo anterior no es sino un caso particular del criterio de paralelismo entre vectores (§18).

56. *Aplicaciones.*— De las fórmulas examinadas hasta aquí se desprende con extrema sencillez un gran número de cuestiones relativas á la geometría y trigonometría, como se ve en los ejemplos que siguen:

1.— *Suma de los ángulos de un polígono*



Sean  $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$  los lados, y  $\phi_1, \phi_2, \dots, \phi_n$  los ángulos internos de un polígono, de los cuales indica una parte la figura; se tendrá:

$$\alpha_2 = \varepsilon_1^{\pi - \phi_1} \cdot \alpha_1$$

.....

$$\alpha_n = \varepsilon_1^{\pi - \phi_{n-1}} \cdot \alpha_{n-1}$$

$$\alpha_1 = \varepsilon_1^{\pi - \phi_n} \cdot \alpha_n$$

en que  $\varepsilon_1$  es un versor perpendicular al plano del polígono. Estas relaciones dan:

$$\alpha_1 \cdot \alpha_2 \cdot \dots \cdot \alpha_n = \varepsilon_1^{n\pi - \Sigma\phi} \alpha_1 \cdot \alpha_2 \cdot \dots \cdot \alpha_n; \text{ de donde:}$$

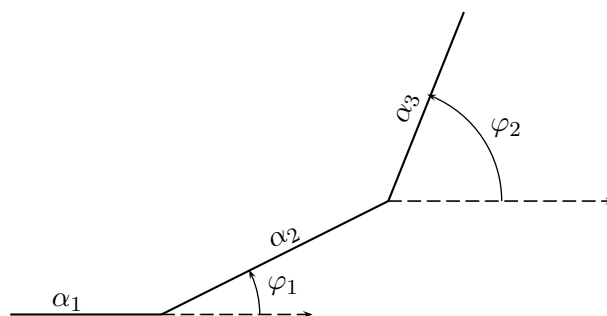
$$\varepsilon_1^{n\pi - \Sigma\phi} = 1 \quad \text{y} \quad (44 - e) :$$

$$n\pi - \Sigma\phi = 2\pi \therefore \Sigma\phi = (n - 2) \cdot \pi,$$

que es el valor conocido de la suma de los ángulos internos de un polígono.

2. -- Ecuaciones que determinan un polígono

La figura representa



tres lados de un polígono de  $n$  lados; llamando  $\phi_1, \phi_2, \dots, \phi_n$  los ángulos que forman los lados con el lado  $\alpha_1$ , como lo indica la figura;  $a_1, a_2$ , etc. los tensores de  $\alpha_1, \alpha_2$  etc. y  $\alpha'_1$  la unidad vectorial de  $\alpha_1$ ; tendremos:

$$\Sigma\alpha = a_1\alpha'_1 + a_2\varepsilon_1^{\phi_1} \cdot \alpha'_1 + \dots + a_n\varepsilon_1^{\phi_{n-1}} \cdot \alpha'_1.$$

Si se trata de una figura cerrada se tendrá:  $\Sigma\alpha = 0$ , y sustituyendo por  $\varepsilon_1^{\phi_1}, \varepsilon_1^{\phi_2}$ , etc. sus valores:

$$a_1 + a_2(\cos \phi_1 + \varepsilon_1 \sin \phi_1) + \dots + a_n(\cos \phi_{n-1} + \varepsilon_1 \sin \phi_{n-1}) = 0$$

de donde (55):

$$a_1 + a_2 \cos \phi_1 + \dots + a_n \cos \phi_{n-1} = 0 \dots (1)$$

$$a_2 \sin \phi_1 + \dots + a_n \sin \phi_{n-1} = 0 \dots (2)$$

Si á estas dos ecuaciones agregamos la que da el valor de la suma de los ángulos del polígono, tendremos en todo tres ecuaciones para determinar los  $n$  lados y

$n$  ángulos de éste; por donde vemos que de los  $2n$  elementos que constituyen un polígono  $2n - 3$  son arbitrarios.

3.- Raíces enésimas de la unidad

De:  $\left(i \frac{2r\pi}{n}\right)^n = 1$  se tiene:

$$i^{\frac{2r\pi}{n}} = \sqrt[n]{1} \dots \dots (1)$$

lo que nos da las  $n$  raíces enésimas de la unidad. En efecto, si hacemos  $r = 0 = 1 = 2 = \dots = n - 1$  obtendremos  $n$  *versores distintos* y no más de  $n$ , á saber:

$$i^0, i^{\frac{2\pi}{n}}, i^{\frac{4\pi}{n}}, \dots, i^{\frac{2(n-1)\pi}{n}},$$

cuyos valores trigonométricos son:

$$\cos 0 + i \sin 0, \cos \frac{2\pi}{n} + i \sin \frac{2\pi}{n}, \dots, \cos \frac{2(n-1)\pi}{n} + i \sin \frac{2(n-1)\pi}{n} \dots (2)$$

haciendo  $n = 2$  tenemos las dos raíces cuadradas de la unidad:  $+1$  y  $-1$ .

Si hacemos  $n = 2s$ , la serie (2) se convierte en esta otra:

$$(3) \dots + 1, \cos \frac{2\pi}{n} \pm i \sin \frac{2\pi}{n}, \dots \cos \frac{2(s-1)\pi}{n} \pm i \sin \frac{2(s-1)\pi}{n}, -1$$

si suponemos  $n = 2s + 1$ , la serie (2) nos da:

$$(4) \dots + 1, \cos \frac{2\pi}{n} \pm i \sin \frac{2\pi}{n}, \dots \cos \frac{2s\pi}{n} \pm i \sin \frac{2s\pi}{n}$$

(3) y (4) nos dicen que si  $n$  es par, las raíces tienen *dos valores reales*, y que si  $n$  es impar, sólo tiene *un valor real*.

4.- Desarrollo de  $\cos(\phi \pm \phi')$  y  $\sin(\phi \pm \phi')$

Tenemos:

$$\varepsilon_1^\phi \varepsilon_1^{\pm\phi'} = (\cos \phi + \varepsilon_1 \sin \phi) \cdot (\cos \phi' \pm \varepsilon_1 \sin \phi') = \cos \phi \cdot \cos \phi' \mp \sin \phi \cdot \sin \phi' + \varepsilon_1 (\cos \phi' \cdot \sin \phi \pm \cos \phi \cdot \sin \phi');$$

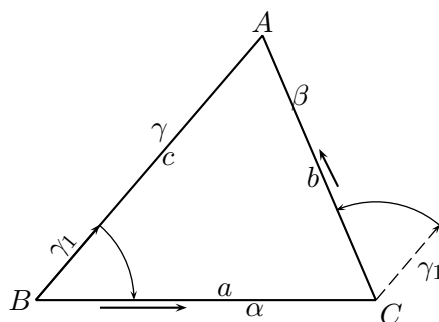
y comparando esta expresión con:

$$\varepsilon_1^{\phi \pm \phi'} = \varepsilon_1^{\phi \pm \phi'} = \cos(\phi \pm \phi') + \varepsilon_1 \sin(\phi \pm \phi')$$

sale:

$$\cos(\phi \pm \phi') = \cos \phi \cdot \cos \phi' \mp \sin \phi \cdot \sin \phi' \dots \dots (1) \text{ y}$$

$$\sin(\phi \pm \phi') = \cos \phi' \cdot \sin \phi \pm \cos \phi \cdot \sin \phi' \dots \dots (2)$$



5.- Sea el triángulo  $ABC$ ; tendremos:

$$\frac{\alpha}{\gamma_1} = a\varepsilon_1^B \quad \text{y} \quad \frac{\beta}{\gamma_1} = b\varepsilon_1^{-A}, \text{ de donde:}$$

$$a\varepsilon_1^B + b\varepsilon_1^{-A} = c,$$

y sustituyendo los valores de los versores:

$$a(\cos B + \varepsilon_1 \cdot \sin B) + b(\cos A - \varepsilon_1 \cdot \sin A) = c;$$

y según (55):

$$a \cos B + b \cos A = c \dots \dots (1) \text{ y}$$

$$a \sin B = b \sin A \dots \dots (2).$$

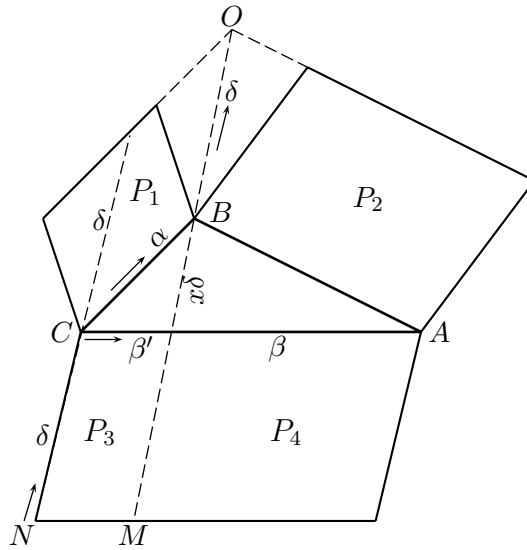
También podemos poner:  $\alpha - \beta = \gamma$ , ó bien:  $\alpha^2 + \beta\alpha = \gamma\alpha$ ; tomando partes vectoriales se tiene:  $V\beta\alpha = V\gamma\alpha$ , puesto que  $V\alpha^2 = 0$ , por ser  $\alpha^2$  un escalar; reemplazando los términos por sus valores ( $f_{21}$ ) se obtiene:

iv.(1891).  
pág. 313

$$ba \cdot \sin C = ca \cdot \sin B, \text{ ó sea}$$

$$b \cdot \sin C = c \cdot \sin B.$$

6.- *Generalización del problema de Pitágoras*



De la figura se saca, haciendo  $\dot{O}B = \dot{N}C$  por construcción:

$$-\alpha - \delta + \beta' = \delta + x\delta;$$

multiplicando por  $x\delta$  :  $-\alpha\delta - \delta^2 + \beta'\delta = \delta^2 + x\delta^2$ , de donde ( $f_1$ ):

$$-V\alpha\delta + V\beta'\delta = 0 \text{ y}$$

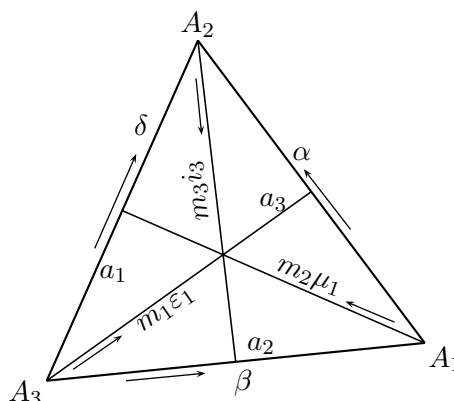
$$T.V\alpha\delta = T\beta'\delta,$$

lo que nos dice que el área del paralelogramo  $P_1$  es igual á la de  $P_3$ ; del mismo modo se demuestra que  $P_2 = P_4$ , y de consiguiente se tiene:

$$P_1 + P_2 = P_3 + P_4,$$

relación de la cual el teorema del cuadrado de la hipotenusa no es sino un caso particular.

7.- *Tres veces la suma de los cuadrados de los tres lados de un triángulo es igual á cuatro veces la suma de los cuadrados de sus medianas*



De la figura se saca:

$$\delta = m_1 \varepsilon_1 + \frac{\alpha}{2} \text{ y } \beta = m_1 \varepsilon_1 - \frac{\alpha}{2}, \text{ de donde:}$$

$$\delta^2 + \beta^2 = 2m_1^2 \varepsilon_1^2 + \frac{1}{2} \alpha^2;$$

del mismo modo se obtiene:

$$\alpha^2 + \beta^2 = 2m_2^2 u_1^2 + \frac{1}{2} \delta^2 \text{ y}$$

$$\alpha^2 + \delta^2 = 2m_3^2 i_1^2 + \frac{1}{2} \beta^2.$$

sumando estas tres relaciones sale:

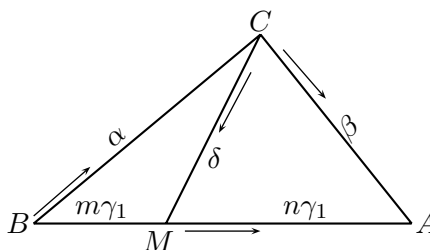
$$2(\alpha^2 + \beta^2 + \delta^2) = 2(m_1^2 \varepsilon_1^2 + m_2^2 u_1^2 + m_3^2 i_1^2) + \frac{1}{2}(\alpha^2 + \beta^2 + \delta^2), \text{ ó bien:}$$

$$\frac{3}{2}(\alpha^2 + \beta^2 + \delta^2) = 2(m_1^2 \varepsilon_1^2 + m_2^2 u_1^2 + m_3^2 i_1^2),$$

y pasando á tensores:

$$3\Sigma a^2 = 4\Sigma m^2$$

8.- Sea un triángulo  $ABC$  y  $M$  un punto cualquiera de uno de sus lados como el  $AB$ , al cual divide dicho punto en dos partes proporcionales á  $m$  y  $n$ .



La figura nos da:

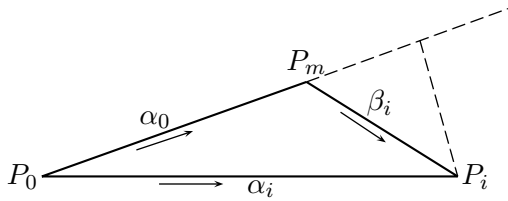
$$\begin{aligned} \alpha &= m\gamma_1 - \delta \text{ y } \beta = n\gamma_1 + \delta, \text{ de donde:} \\ n\alpha^2 &= n(m\gamma_1 - \delta)^2 = nm^2\gamma_1^2 - nm_1\delta\gamma_1 - nm\gamma_1\delta + n\delta^2 \dots\dots (1) \\ m\beta^2 &= m(n\gamma_1 + \delta)^2 = n^2m\gamma_1^2 + mn\gamma_1\delta + mn\delta\gamma_1 + m\delta^2 \dots\dots (2) \\ \therefore n\alpha^2 + m\beta^2 &= (nm^2 + mn^2)\gamma_1^2 + (m+n)\delta^2, \end{aligned}$$

y pasando á escalares ó tensores:

$$na^2 + mb^2 = nm^2 + nm^2 + (m+n)d^2.$$

Si  $m = n$  se tiene el teorema bien conocido:  $a^2 + b^2 = 2(m^2 + d^2)$ ; si  $m = \frac{n}{2}$ , entonces  $2a^2 + b^2 = 6m^2 + 3d^2$ .

9. Sea  $p_m$  el punto medio correspondiente á  $n$  puntos  $p_1, p_2, \dots, p_n$ , y sea  $p_0$  un punto tomado por origen de vectores; llamemos  $\alpha_0$  al vector  $p_0p_m$ ,  $\alpha_i$  al  $p_0p_i$  y  $\beta_i$  al  $p_m p_i$ , y  $a_0 a_i$  y  $b_i$  á sus respectivos tensores.



Elevando al cuadrado el vector  $\beta_i$  tenemos:

$$\beta_i^2 = (\alpha_i - \alpha_0)^2 = \alpha_i^2 - \alpha_i\alpha_0 - \alpha_0\alpha_i + \alpha_0^2;$$

y tomando escalares:

$$\begin{aligned} -b_i^2 &= -a_i^2 - a_0^2 - 2S\alpha_i\alpha_0 \quad (f_{30}); \\ \text{pero } S\alpha_i\alpha_0 &= \alpha_0(\alpha_0 + c_i) \quad (55 - b), \\ \therefore -b_i^2 &= -a_i^2 + a_0^2 - 2\alpha_0c_i \end{aligned}$$

Multiplicando esta expresión por  $m_i$ , sumando y recordando que  $\Sigma\alpha_0m_i c_i = \alpha_0\Sigma_n^1 m_i c_i = 0$ , se obtiene:

$$\Sigma_n^1 a_i^2 m_i = \Sigma_n^1 b_i^2 m_i + a_0^2 \Sigma_n^1 m_i \dots\dots (1)$$

Si  $m_i =$  una constante, entonces:

$$\Sigma_n^1 a_i^2 = na_0^2 + \Sigma_n^1 b_i^2 \dots\dots\dots (2).$$

Haciendo en (2)  $n = 2$  y en (1)  $n = 2$ ,  $m_1 = 1$  y  $m_2 = 2$  se llega de nuevo á los resultados del ejemplo anterior (8).

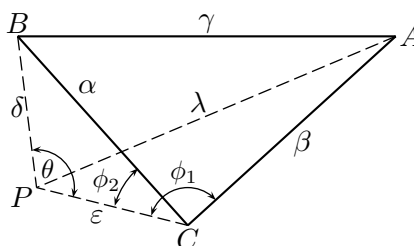
Aplicando la formula (2) se obtiene la solución de un gran número de cuestiones. Sean, por ejemplo,  $m_1, m_2, m_3$  las medianas de un triángulo inscrito en un círculo de radio  $R$ , y sea  $d$  la distancia entre el centro del círculo y el punto medio del triángulo; suponiendo que  $p_0$  coincida con el centro del círculo, se tiene la relación:

$$27(R^2 - d^2) = 4\Sigma m^2$$

Si hacemos  $n = 5$  en (2) y suponemos que estos puntos dividan una circunferencia en cinco partes iguales, se tiene, tomando á  $p_0$  en uno de dichos puntos:  $a_1^2 + a_2^2 = 5R^2$ , en que  $a_1$  y  $a_2$  son los lados del pentágono convexo y del pentágono estrellado cuyos vértices coinciden con los puntos, siendo  $R$  el radio del círculo. Del mismo modo se obtiene para los dos octógonos regulares, convexo y estrellado:

$$a_1^2 + a_2^2 = 4R^2.$$

10.- *Relación entre los lados de un triángulo y las líneas que unen sus vértices con un punto dado.*



Sea  $ABC$  un triángulo y  $P$  un punto; la figura da:

$$\alpha + \varepsilon = \delta \quad \text{y} \quad \beta - \varepsilon = \lambda;$$

de donde:

$$\delta\lambda = (\alpha + \varepsilon).(\beta - \varepsilon) = \alpha\beta + \varepsilon\beta - \alpha\varepsilon - \varepsilon^2,$$

y tomando escalares ( $f_{20}$ ):

$$-d_1d_2 \cos \theta = -ab. \cos C - d_2b \cos \phi_1 + ad_2. \cos \phi_2 - d_2^2 \quad \text{ó bien:}$$

$$ab. \cos C + bd_2. \cos \phi_1 = d_1d_3 \cos \theta + ad_2. \cos \phi_2 + d_2^2 \dots \dots (1)$$

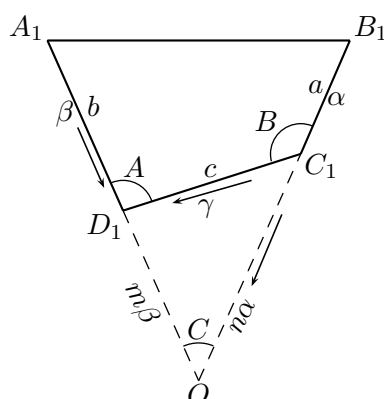
en que  $a, b$  y  $c$  y  $d_1, d_2, d_3$  indican los tensores de  $\alpha, \beta$  y  $\gamma$  y  $\delta\varepsilon$  y  $\lambda$ .

Como el punto  $P$  puede hallarse fuera del plano del triángulo, la relación (1) se aplica también á un tetraedro.

11.- *Hallar el área de un cuadrilátero, conociendo tres lados y el ángulo que forman. (V. el número 21 de los Anales.)*

IV.(1891),  
pág. 316

IV.(1891),  
pág. 335



Sea el cuadrilatero  $A_1B_1C_1D_1$ , y designemos por  $a, b$  y  $c$  los tres lados, y por  $A$  y  $B$  los dos ángulos conocidos. Sean, además,  $\alpha, \beta$  y  $\gamma$  los vectores correspondientes á los lados, y hagamos  $D_1O = m\beta$  y  $C_1O = n\alpha$ .

Siendo  $Q$  el área buscada se tiene:

$$Q = \frac{1}{2}(m+1)(n+1)TV\beta\alpha - \frac{1}{2}mnTV\beta\alpha = \frac{m+n+1}{2}TV\beta\alpha \dots\dots (1) \quad (\S 53)$$

La figura nos da:

$$\gamma + m\beta = n\alpha \dots\dots\dots (2);$$

multiplicando por  $\times\gamma$  y tomando partes vectoriales, sale: ( $f_1$ ) :

$$mV\beta\gamma = nV\alpha\gamma \dots\dots\dots (3),$$

y efectuando la misma operación con  $\times\alpha$ ,

$$V\gamma\alpha + mV\beta\alpha = 0 \dots\dots\dots (4).$$

$$(4) \text{ nos da: } m = -\frac{V\gamma\alpha}{V\beta\alpha} \text{ y } (3) : n = m \frac{V\beta\gamma}{V\alpha\gamma} = -m \frac{V\beta\gamma}{V\gamma\alpha} = \frac{V\beta\gamma}{V\beta\alpha} \quad (f_{26})$$

de donde:

$$m + n + 1 = \frac{V\beta\gamma}{V\beta\alpha} - \frac{V\gamma\alpha}{V\beta\alpha} + 1 = \frac{V\beta\gamma - V\gamma\alpha + V\beta\alpha}{V\beta\alpha};$$

reemplazando este valor en (1) se tiene el área buscada ( $f_{25}$ ):

$$Q = \frac{TV\beta\gamma - TV\gamma\alpha + TV\beta\alpha}{2} = \frac{bc \sin A + ac \sin B + ab \sin C}{2} \dots\dots\dots (2)$$

Si suponemos á  $\alpha$  y  $\beta$  paralelos,  $V\beta\alpha = 0$  y

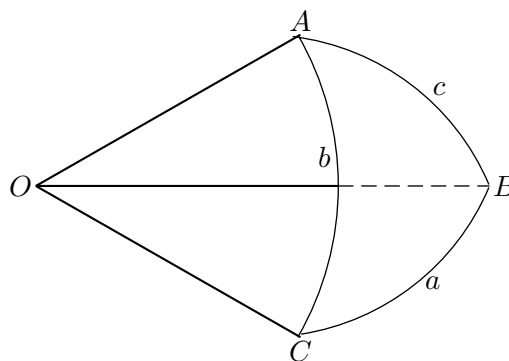
$$Q = \frac{TV\beta\gamma - TV\gamma\alpha}{2}$$

que es la expresión del área de un trapecio.

Nótese que  $V\beta\gamma$  y  $V\gamma\alpha$  tienen signos contrarios y que por eso es positivo el segundo término del numerador de (2),  $ac \sin B$ ; la razón consiste en que si hacemos girar á  $\gamma$  en el sentido de  $\beta$  á  $\gamma$ , esto es, de izquierda á derecha, dicho vector engendra á  $T\gamma(-\alpha_1)$  y no á  $T\gamma(\alpha_1)$ ; para engendrar este último es necesario

que  $\gamma$  gire de derecha á izquierda, ó sea en sentido opuesto á la rotación de  $V\beta\gamma$ .  
 (Aquí el sub-índice indica naturalmente un vector unitario.)

12.- *Relaciones fundamentales de la trigonometría esférica*



Tomemos tres vectores unitarios  $i_1, i_2, i_3$ , respectivamente perpendiculares á las tres caras  $OAB, OBC$  y  $OAC$  de un triedro esférico  $OABC$ .

Considerando positivas las rotaciones verificadas en el sentido indicado en (41 - g), se tiene (41 - d):

$$i_1^c, i_2^a = i_3^{-b}$$

ó bien:

$$(\cos c + i_1 \sin c).(\cos a + i_2 \sin a) = \cos b - i_3 \sin b \dots (1)$$

Tomando escalares sale:

$$\cos b = \cos a \cos c + S i_1 i_2 \sin c \sin a;$$

observando que el ángulo comprendido entre  $i_1$  é  $i_2$  es igual á  $\pi - B$ , se obtiene la fórmula conocida:

$$\cos b = \cos a \cos c + \sin c \sin a \cos B.$$

Si tomamos las partes vectoriales de (1), resulta:

$$-i_3 \sin b = i_1 \sin c \cos a + i_2 \sin a \cos c + i_1 i_2 \sin a \sin c,$$

y multiplicando por  $\times i_1$ :

$$-i_3 i_1 \sin b = -\sin c \cos a + i_2 i_1 \sin a \cos c + i_1 i_2 i_1 \sin a \sin c;$$

tomando escalares y recordando que  $S i_1 i_2 i_1 = S i_2 = 0$ ; se obtiene:

$$\sin b \sin A = \cos a \sin c - \cos c \sin a \cos B.$$

57. *Producto de vectores en términos de sus coordenadas.* - (a). Sea  $\alpha$  un vector que pase por el origen de un sistema de coordenadas ortogonales, cuyos vectores unitarios correspondientes á los tres ejes designaremos por  $i_1, i_2, i_3$ , como en el

§49. Si referimos el vector á dichos ejes y llamamos  $a_1, a_2$  y  $a_3$  las cantidades que expresan las longitudes de las proyecciones, podremos poner:

$$\alpha = a_1 i_1 + a_2 i_2 + a_3 i_3,$$

puesto que  $\alpha$  es la diagonal del prisma rectangular cuyas aristas son  $a_1 i_1, a_2 i_2$ , etc.

Según esto, el producto de dos vectores coinciales  $\alpha$  y  $\beta$  cuyo punto común pase por el origen podrá escribirse:

$$\alpha\beta = (a_1 i_1 + a_2 i_2 + a_3 i_3)(b_1 i_1 + b_2 i_2 + b_3 i_3).$$

Efectuando la multiplicación y teniendo presentes las convenciones establecidas a cerca de los símbolos  $i_1, i_2, i_3$  (49), sale:

$$\alpha\beta = -(a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3) + \begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix} i_1 i_2 + \begin{vmatrix} a_1 & a_3 \\ b_1 & b_3 \end{vmatrix} i_1 i_3 + \begin{vmatrix} a_2 & a_3 \\ b_2 & b_3 \end{vmatrix} i_2 i_3 \dots (1)$$

ó sea:

$$\alpha\beta = - \left\{ \Sigma_3^1 a_r b_r + \begin{vmatrix} i_1 & i_2 & i_3 \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix} \right\} \dots (2)$$

(b). Si suponemos  $\alpha = \beta$  se tiene:

$$\alpha^2 = -\Sigma_3^1 a_r b_r = -(a_1^2 + a_2^2 + a_3^2) \text{ y} \\ T\alpha = \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2};$$

(2) también nos da:

$$S\alpha\beta = -\Sigma_3^1 a_r b_r \dots (1)$$

58. *Cuaternio expresado bajo la forma de un cuatrinomio.*— (a) Sea la expresión general:  $q = Sq + m\varepsilon_1$ ; cualquiera que sea la dirección del vector  $m\varepsilon_1$ , podemos trasladarlo paralelamente á sí mismo hasta hacerlo pasar por el origen de coordenadas; esto hecho, se tendrá de acuerdo con la notación del párrafo precedente, y haciendo  $Sq = a_0$ :

$$q = a_0 + a_1 i_1 + a_2 i_2 + a_3 i_3 \dots (1).$$

(b). La expresión (1) permite extender la ley asociativa á cuaternos cualesquiera; en efecto, poniendo los cuaternos bajo la forma de (1) se ve que el producto de dos ó más de ellos se compone de partes escalares ó de partes en que entran escalares y los vectores rectangulares  $i_2, i_2, i_3$ , y como la ley *asociativa*

rige á unas y otras, se sigue que también es aplicable á cuaternios cualesquiera rectangulares ó no. Con esto queda comprobado que la multiplicación cuatérnica obedece á todas las reglas de la multiplicación algébrica, salvo, en general, la ley conmutativa (41).

(c). Tenemos:

$$(f_8) Tq = \sqrt{(Sq)^2 - (Vq)^2}$$

y en virtud de la expresión de (54 - b):

$$Tq = \sqrt{a_0^2 + a_1^2 + a_2^2 + a_3^2}$$

$$\text{y } TVq = \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2} = q \sin \phi$$

IV.(1891),  
pág. 338

59. *Producto de varios cuaternios.*— (a). Sea  $q_1 q_2 \dots q_n = q_x$  el producto de  $n$  cuaternios cuyos tensores son  $a_1, a_2, \dots, a_n$  y  $a_x$ , respectivamente; se tiene:

$$\frac{1}{q_1} \cdot q_1 q_2 \dots q_n = \frac{1}{q_1} \cdot q_x;$$

ó bien:

$$q_2 q_3 \dots q_n = \frac{kq_1}{a_1^2} \cdot q_x \quad (f_{23});$$

pasando del mismo modo los  $r$  primeros factores al segundo miembro, sale:

$$q_{r+1} \dots q_n = \frac{kq_r \dots kq_1}{a_r^2 \dots a_1^2} \cdot q_x \dots \dots (1)$$

Si en lugar de pasar los  $r$  primeros factores pasamos los  $r$  últimos, resulta:

$$q_1 q_2 \dots q_{n-r} = q_x \cdot \frac{kq_n \dots kq_{n-r+1}}{a_n^2 \dots a_{n-r+1}^2} \dots \dots (2)$$

y pasando todos los factores en el orden de (1), se obtiene:

$$1 = \frac{kq_n \dots kq_1}{a_x^2} \cdot q_x; \text{ pero } \frac{q_x}{a_x^2} = \frac{1}{kq_x}$$

$$\therefore kq_x = kq_1 \dots q_n = kq_n kq_{n-1} \dots kq_1 \dots \dots (3)$$

(b). La última expresión también puede escribirse así:

$$kq_x \frac{a_n^2 \dots a_1^2}{q_n \dots q_1}.$$

Y si se trata de cuaternios *rectangulares*, tendremos:

$$kq_x \cdot (-a_1^2) = \frac{a_n^2 \dots a_2^2}{q_n \dots q_2} \cdot \frac{a_1^2}{q_1} \cdot q_1^2,$$

ó sea:

$$-kq_x = \frac{a_n^2 \dots a_2^2}{q_n \dots q_2} \cdot q_1$$

y análogamente:

$$(-1)^n kq_x = q_n \cdot q_{n-1} \dots q_1 \dots \dots (4)$$

(c). Sean tres cuaternios *rectangulares*  $q_1, q_2$  y  $q_3$ ; observando que  $q_1q_2$  y  $q_2q_1$  son conjugados entre sí, lo mismo que  $q_3Vq_1q_2$  y  $Vq_1q_2.q_3$  (relación [4]), se tiene:

$$2V.q_3Vq_1q_2 = q_3Vq_1q_2 - Vq_1q_2q_3 \quad (f_{22});$$

pero  $Vq_1q_2 = q_1q_2 - Sq_1q_2 \therefore 2V.q_3Vq_1q_2 = q_3(q_1q_2 - Sq_1q_2) - (q_1q_2 - Sq_1q_2)q_3 =$   
 $q_3q_1q_2 - q_1q_2q_3 = q_3q_1q_2 + q_1q_3q_2 - q_1q_2q_3 - q_1q_3q_2,$

ó bien:

$$2V.q_3Vq_1q_2 = (q_3q_1 - q_1q_3)q_2 - q_1(q_2q_3 - q_3q_2),$$

y finalmente:

$$V.q_3Vq_1q_2 = q_2Sq_1q_3 - q_1Sq_2q_3 \dots \dots (5)$$

IV.(1891).  
pág. 339

60. *Parte escalar del producto de tres vectores.*— (a). Multiplicando la relación (1)  $(57 - a)$  por  $\times\gamma = \times(c_1i_1 + c_2i_2 + c_3i_3)$ , se obtiene:

$$S\alpha\beta\gamma = c_1 \begin{vmatrix} a_2 & a_2 \\ b_2 & b_2 \end{vmatrix} i_1i_2i_3 + c_2 \begin{vmatrix} a_1 & a_3 \\ b_1 & b_3 \end{vmatrix} i_1i_3i_2 + c_3 \begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix} i_2i_3i_1 \dots \dots (1)$$

porque todos los demás términos del producto son vectores, y de consiguiente sus partes escalares son nulas; esta expresión equivale á

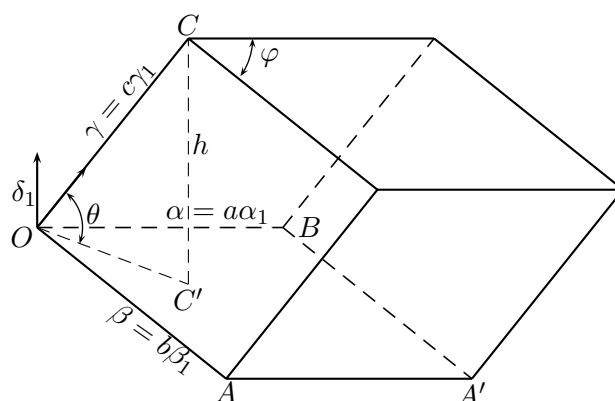
$$S\alpha\beta\gamma = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix} i_1i_2i_3 \dots \dots (2)$$

(b). La determinante representa el volumen del paralelepipedo cuyas aristas son iguales á  $\alpha, \beta$  y  $\gamma$ ; el factor  $i_1, i_2, i_3$  corresponde á la unidad del volumen, ó sea al cubo que tiene por aristas á  $i_1, i_2, i_3$ .

Llamando  $\Delta$  la determinante anterior, también se obtiene:

$$S.\alpha\gamma\beta = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix} i_1i_2i_3 = -\Delta i_1i_2i_3 = \Delta i_1i_3i_2 = -\Delta;$$

de donde: *volumen del paralelepipedo* =  $\pm\Delta$ . Por estas relaciones vemos que el signo del volumen depende del producto de los vectores  $i_1, i_2$  é  $i_3$ ; luego si se permutan los factores de  $S.\alpha\beta\gamma$ , el signo de este último producto permanecerá constante siempre que los factores conserven el orden cíclico, y variará, por el contrario, en el caso en que el referido orden se halle alterado.



(c). El resultado anterior también puede obtenerse directamente. En efecto, sean  $\alpha, \beta$  y  $\gamma$  tres vectores coinciales como lo indica la figura; llamemos  $A$  el área del paralelogramo  $OAA'B$ ;  $\theta$  el ángulo de  $\gamma$  con el plano de  $\alpha$  y  $\beta$ ;  $h = cc'$  la altura, y  $v$  el volumen del paralelepípedo; tendremos, conforme es sabido:

$$SV\alpha\beta.\gamma = \pm S.Ac\varepsilon_1\gamma_1;$$

siendo  $\varepsilon_1$  un vector unitario perpendicular al plano de  $\alpha$  y  $\beta$ ; pero

$$S\varepsilon_1\gamma_1 = -\cos(90^\circ - \theta) = -\sin \theta$$

$$\therefore SV\alpha\beta.\gamma = \mp Ac \sin \theta;$$

y como  $c \cdot \sin \theta = h$ , sale:

$$SV\alpha\beta.\gamma = \mp Ah = \mp v$$

Ahora,

$$SV\alpha\beta.\gamma = S.(\alpha\beta - S\alpha\beta).\gamma = S.\alpha\beta\gamma,$$

de donde:

$$S.\alpha\beta\gamma = \mp v \dots \dots (1)$$

(d). Si los tres vectores  $\alpha, \beta$  y  $\gamma$  son coplanales,  $v = 0$ , y se tiene:

$$S.\alpha\beta\gamma = 0 \dots \dots (2)$$

relación que expresa la condición que deben llenar tres vectores para ser coplanales.

61. *Aplicaciones á la Geometría analítica.*— (a). NOTACION Y LOCUCIONES CONVENCIONALES. Para abreviar el lenguaje se emplea la locución *operar con*  $S \times \alpha$ , *operar con*  $V \times \alpha$ , en vez de decir multiplicar por  $\times \alpha$  y tomar después partes escalares ó partes vectoriales; análogas expresiones se usan con referencia á otros símbolos.

(b). Para mayor claridad, representaremos en lo que sigue los vectores correspondientes á puntos considerados *fijos* por las letras mayúsculas del alfabeto

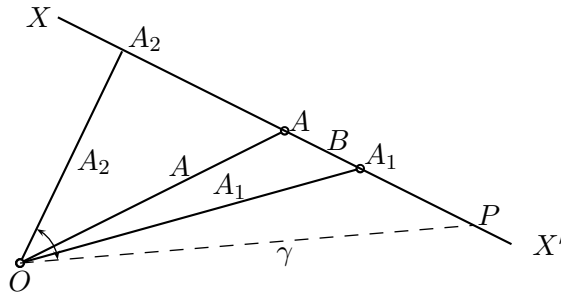
común, y á los tensores por las letras minúsculas correspondientes; las letras griegas, con sub-índices ó sin ellos, se referirán, en general, á vectores *variables*.

(c). En vez de decir: el punto cuyo vector es  $A$  diremos simplemente: el punto  $A$ , lo que equivale á representar vectores y puntos correspondientes por una misma letra.

Por último, la unidad empleada como sub-índice no indicará en adelante que se trata de vectores unitarios, á menos que así se exprese. Las *cantidades variables* serán representadas por las letras  $x, y$  etc.

1.— *Ecuación de la recta*

IV.(1891),  
pág. 365



Sean  $O$  el origen de vectores, y  $A, A_1$  dos puntos conocidos de una recta indefinida  $XX'$ ; otro punto cualquiera de la línea será dado por la relación.

$$\gamma = A + x(A_1 - A) \dots \dots (1)$$

que es la ecuación de la recta que pasa por los puntos  $A$  y  $A_1$ .

Si en lugar de conocer á  $A_1$  se tiene la dirección de la línea, (1) asume la forma:

$$\gamma = A + xB \dots \dots (2)$$

en que  $B$  es un vector cualquiera paralelo á la recta.

Si reemplazamos en (2) á  $A$  por el vector  $A_2$  perpendicular á la recta, tendremos:

$$\gamma = A_2 + xB$$

y operando con  $SA_2$ , sale:

$$S\gamma A_2 = SA_2^2 + xSA_2B$$

pero  $SA_2B = 0$ , por ser  $A_2$  perpendicular á  $B$ , de donde se tiene que (omitiendo los sub-índices):

$$S.\gamma A = A^2 = -a^2 \dots \dots (3)$$

es la ecuación de una recta en términos de la perpendicular bajada á ella desde el origen.

A esta ecuación es necesario agregar, sin embargo, la condición que determine el plano de  $\gamma$  y  $A$ , porque de otro modo  $\gamma$  puede referirse en (3) á una cualquiera de las perpendiculares que pueden bajarse al vector  $A$  en el punto  $A$ .

La ecuación (3) equivale á esta otra:

$$-ra \cos \phi = -a^2$$

si por  $r$  indicamos el tensor de  $\gamma$ , ó sea:

$$r \cos \phi = a$$

que es la ecuación polar de la recta.

2.- *Ecuación de la recta que pasa por un punto determinado y es perpendicular á otra recta dada*

Sean  $A$  el punto fijo,  $A_1$  el vector perpendicular á la línea que se busca, y  $B$  un segmento de esta última; la ecuación de la línea buscada es:

$$\gamma = A + xB$$

y operando con  $SA_1$ :

$$S\gamma A_1 = SAA_1 \dots \dots (4)$$

puesto que  $SBA_1 = 0$  por ser  $B$  y  $A_1$  perpendiculares por hipótesis.

Obsérvese que el símbolo *directivo*  $B$  de la línea buscada no aparece en la ecuación (4), lo cual proviene de no haberse fijado el plano de la figura como yá hicimos notar con referencia á la ecuación (3).

3.- *Largo de la perpendicular bajada de un punto á una recta*

De la ecuación (3) se obtiene:

$$TA.S\gamma A_1 = -(TA)^2$$

de donde:

$$TA = -S\gamma A_1 \dots \dots (5)$$

en que  $A_1$  es el vector unitario correspondiente á  $A$ .

*Observación.*- Para evitar la confusión que puede venir del uso del subfijo (1), conviene á veces emplear la notación de Hamilton, que consiste en anteponer la letra  $u$  al símbolo de un vector, para indicar que se toma la unidad lineal de dicho vector; según esto, (5) se escribe:

$$TA = -S.\gamma uA$$

4.- *Ecuación del plano*

Sea  $A$  la perpendicular bajada á un plano desde el origen, y  $\gamma$  un vector correspondiente á un punto cualquiera del plano; la ecuación de éste es evidentemente la ecuación (3) sin la condición que limita el vector  $\gamma$  á un plano dado, ó sea:

$$S.\gamma A = A^2 = \text{una constante} \dots (3')$$

Esta ecuación también puede escribirse:

$$\frac{A^2}{A^2} = \frac{S\gamma A}{A^2} = \frac{S\gamma}{A}$$

$$\therefore \frac{S\gamma}{A} = 1 \dots (6)$$

Si el plano pasa por el origen su ecuación es:

$$S\gamma A = 0 \dots (7)$$

en que  $A$  representa un vector indefinido perpendicular al plano.

5.- *Ecuación de un plano perpendicular á una recta  $A$  y que pasa por un punto  $B$*

La ecuación del plano perpendicular á  $A$  es, como acabamos de ver:

$$S.\gamma A = A^2$$

luego si  $B$  es un punto del plano, se deberá tener:

$$SAB = A^2$$

de donde:

$$S.A(\gamma - B) = 0 \dots (8)$$

que es la ecuación pedida. Esta ecuación también se obtiene directamente así: llamando  $\gamma$  un vector de un punto cualquiera del plano, es claro que  $\gamma - B$  estará situado en el plano, y será, de consiguiente, perpendicular á  $A$ , de donde resulta (8).

6.- *Ecuación de un plano que pasa por tres puntos dados*

Sean  $A_1, A_2$  y  $A_3$  los tres puntos dados, y  $\gamma$  el vector de un punto cualquiera del plano; recordando que por  $A_1$  representamos también el vector que une el origen con el punto  $A_1$  y así para con los demás, se ve que los vectores  $\gamma - A_1, \gamma - A_2$  y  $\gamma - A_3$  son copanales, y de consiguiente (60 - d)

$$S.(\gamma - A_1)(\gamma - A_2)(\gamma - A_3) = 0$$

ejecutando las multiplicaciones y operando con  $S$ , sale:

$$S.\gamma(A_1A_2 + A_1A_3 + A_2A_3) = S.A_1A_2A_3$$

ó bien:

$$S.\gamma(VA_1A_2 + VA_1A_3 + VA_2A_3) = S.A_1A_2A_3$$

Comparando esta expresión con (3') vemos que  $VA_1A_2 + VA_1A_3 + VA_2A_3$  representa un vector perpendicular al plano.

7.- La ecuación del plano también puede expresarse como sigue:

Sean  $\gamma, A_1, A_2$  y  $A_3$  cuatro vectores correspondientes á cuatro puntos del plano; éste quedará determinado por las dos relaciones:

$$m_1 A_1 + m_2 A_2 + m_3 A_3 = \gamma \dots\dots (a)$$

$$m_1 + m_2 + m_3 = 1 \dots\dots (b)$$

En efecto, cualquiera que sea  $\gamma$ , siempre será posible unir sus extremidades por medio de tres vectores *no coplanales* y paralelos respectivamente á  $A_1, A_2$  y  $A_3$ ; los tensores de estos vectores expresados en términos de estos últimos darán los coeficientes indeterminados  $m_1, m_2$  y  $m_3$ .

Quedando satisfecha la relación (a), la (b) se verifica necesariamente; para probarlo unamos los puntos  $A_1, A_2$  y  $A_3$  con el punto  $\gamma$  del plano, y llamemos  $B_1, B_2$  y  $B_3$  los vectores así obtenidos; tendremos:

$$m_1(\gamma + B_1) + m_2(\gamma + B_2) + m_3(\gamma + B_3) = \gamma$$

ó bien:

$$m_1 B_1 + m_2 B_2 + m_3 B_3 = (1 - m_1 - m_2 - m_3)\gamma$$

recordando que  $B_1, B_2$  y  $B_3$  están situados en el plano, podemos reemplazar el primer miembro de esta igualdad por un vector también situado en el plano, que representamos por  $mB$ , ó sea:

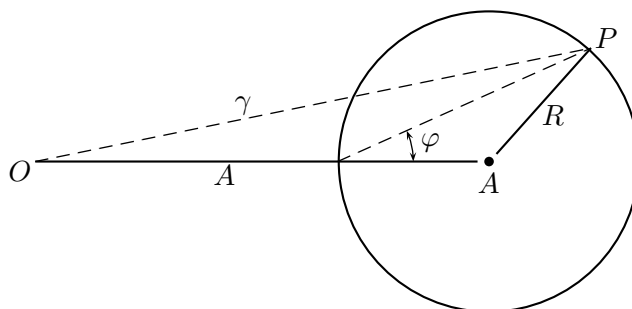
$$mB = (1 - m_1 - m_2 - m_3)\gamma$$

pero  $\gamma$  es un vector situado fuera del plano, de donde (18 - b):

$$1 - (m_1 + m_2 + m_3) = 0$$

que es la relación (b).

8.- Ecuación de la circunferencia



Sean  $A$  el vector del centro de la circunferencia;  $\gamma$  el de un punto cualquiera de ésta, y  $R$  el radio correspondiente. Se tiene:

$$\gamma - A = R$$

de donde:

$$(\gamma - A)^2 = R^2$$

y finalmente:

$$\gamma^2 - 2S\gamma A = R^2 - A^2 = a^2 - r^2 = \text{una constante} \dots (9)$$

que es la ecuación buscada.

Si el centro es el origen, (9) asume la forma:

$$\gamma^2 = R^2 = -r$$

y si se toma el origen en la circunferencia

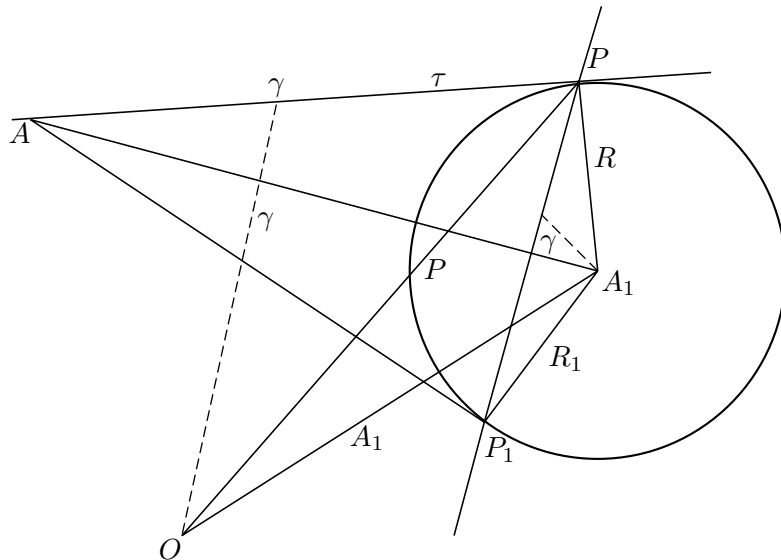
$$2S.\gamma A = r^2$$

haciendo  $T\gamma = y$ , esta ecuación equivale á

$$y = 2r \cos \phi = 0$$

que es la ecuación polar de la circunferencia al tomarse el origen en la circunferencia, y un diámetro por línea inicial.

9.- Ecuación de la tangente



Sea  $P$  el punto de la tangencia y  $\gamma$  otro punto cualquiera de la tangente; llamando  $\tau$  el vector comprendido entre dichos puntos y atendiendo á la demás notación en la figura, se obtiene:

$$A_1 + R + \tau = \gamma$$

y operando con  $S\tau$ :

$$S.A_1\tau + S.R\tau + \tau^2 = S\gamma\tau$$

pero  $R$  y  $\tau$  son perpendiculares por hipótesis, luego  $S.R\tau = 0$  y

$$S.\gamma\tau = S.A_1\tau + \tau^2$$

Si llamamos  $P$  el vector de punto de tangencia y reemplazamos á  $\tau$  por su valor  $\gamma - P$ , sale:

$$S.\gamma P = S.A_1(\gamma - P) + P^2$$

que es la ecuación buscada.

Trasladando el origen al centro,  $A_1 = 0$  y  $P = R$ , de donde:

IV, (1891),  
pág. 369

$$S\gamma R = R^2 = -r^2 \dots\dots (10)$$

10.— *Cuerda de los contactos*

Tomemos el centro por origen, y sean  $P, P_1$  (figura anterior) dos puntos de la circunferencia, y  $A$  el vector del punto de encuentro de las tangentes en  $P$  y  $P_1$ ; llamando  $R$  y  $R_1$  los vectores que unen el centro con  $P$  y  $P_1$ , se tiene para un punto cualquiera de la cuerda que pasa por  $P$  y  $P_1$ :

$$\gamma = R + x(R_1 - R)$$

y operando con  $SA$ :

$$S\gamma A = S.RA + xS.(R_1 - R)A$$

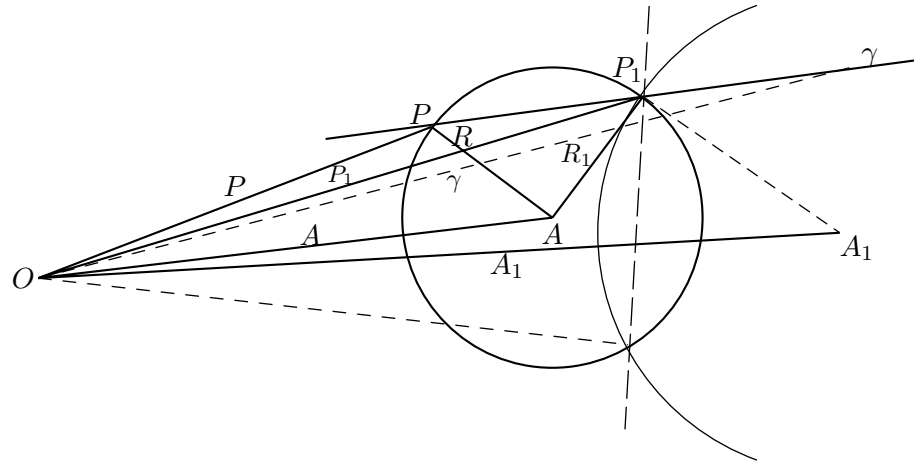
pero  $S.R_1A = S.RA = R^2$ , por ser  $A$  un punto común á ambas tangentes (10), de donde:

$$S.(R_1 - R)A = 0 \dots\dots (a)$$

$$\text{y } S.\gamma A = SRA = R^2 \dots (11)$$

la ecuación (11) es, pues, la ecuación buscada; la  $a$ ) nos dice que la cuerda es perpendicular á la línea que une el centro con la intersección de las tangentes.

11.— *Ecuación de la recta que pasa por dos puntos  $P$  y  $P_1$  de una circunferencia de radio  $r$  y cuyo vector del centro es  $A$*



La ecuación de la recta que pasa por dos puntos  $P$  y  $P_1$ , es, en general:

$$\gamma = P + x(P_1 - P) \dots\dots (a)$$

y como  $P$  y  $P_1$  pertenecen á la circunferencia, se tiene:

$$\begin{aligned} P^2 - 2SPA + A^2 &= R^2 = -r^2 \\ P_1^2 - 2SP_1A + A^2 &= R_1^2 = -r^2 \end{aligned}$$

de donde:

$$\begin{aligned} SPA &= \frac{A^2 + P^2 - R^2}{2} \\ SP_1A &= \frac{A^2 + P_1^2 - R^2}{2} \end{aligned}$$

operando sobre (a) con  $SA$ , sale:

$$S\gamma A = SPA + xS.(P_1 - P)A \dots\dots (b)$$

ó bien:

$$S\gamma A = SPA + xSP_1A - SPA$$

y sustituyendo los valores de  $SPA$  y  $SP_1A$ , se tiene:

$$S\gamma A = \frac{A^2 + P^2 - R^2}{2} + x \frac{P_1^2 - P^2}{2} \dots\dots (12)$$

que es la ecuación pedida.

Haciendo  $TP = TP_1$ , la ecuación (12) se reduce á

$$S\gamma A = SPA$$

Comparando esta expresión con la (b), se obtiene en tal caso:

$$S.(P_1 - P)A = 0$$

lo que nos dice que la cuerda es perpendicular á la línea  $A$ .

12.— *Cuerda común á dos circunferencias*

Si en el ejemplo anterior suponemos otra circunferencia de radio  $r_1$ , y llamamos  $A_1$  el vector de su centro, se tendrá, suponiendo que  $P$  y  $P_1$  sean los puntos en que se cortan las dos circunferencias:

$$2S.\gamma A_1 = A_1^2 + P^2 - R_1^2 + x(P_1^2 - P^2)$$

y comparándola con la (12):

$$2S.\gamma(A - A_1) = A^2 - A_1^2 + R_1^2 - R^2 \dots\dots (13)$$

que es la ecuación de la cuerda común á las dos circunferencias.

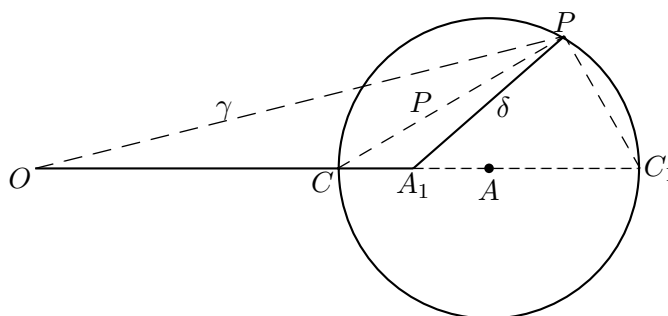
Trasladando el origen á  $A_1$ , sale:

$$2S\gamma A = A^2 + R_1^2 - R^2 = r^2 - (a^2 + r_1^2) \dots\dots(13')$$

13.- *Lugar geométrico de un punto que se mueve en un plano, sujeto á la condición de tener constante la razón de sus distancias á dos puntos fijos*

V, (1891),  
pág. 3

Sean  $O$  y  $A_1$  los dos puntos fijos, y sean  $A$  el vector que los une; llamemos  $\gamma$  la distancia de una posición cualquiera del punto móvil, con referencia al punto  $O$  tomado por origen, y sea  $\delta$  su distancia al otro punto  $A_1$ ; tendremos:



$$\gamma - A_1 = \delta,$$

$$\text{y } \gamma^2 - 2SA_1\gamma + A_1^2 = \delta^2 \dots\dots (a)$$

Pero según las condiciones del problema,  $\frac{T\delta}{T\gamma} = n = \text{una constante}$ ; de donde:  $\delta^2 = n^2\gamma^2$ , y sustituyendo en (a) resulta:

$$\gamma^2 - \frac{2}{1-n^2}SA_1\gamma = -\frac{A_1^2}{1-n^2} \dots\dots (b)$$

lo que nos dice que el lugar geométrico buscado es una circunferencia (8 - Ec. 9).

Para hallar el valor del radio  $r$  llamemos  $A = xA_1$  el vector del centro; la

V, (1891),  
pág. 4

ecuación (9) nos da:

$$\gamma^2 - 2xS.\gamma A_1 = R^2 - x^2 A_1^2 \dots\dots (c)$$

y comparándola con (b) se obtiene:

$$\gamma^2 = \frac{2S.\gamma A_1}{1-n^2} - \frac{A_1^2}{1-n^2} = 2xS.\gamma A_1 + R^2 - x^2 A_1^2 \dots\dots (d)$$

pero (b) y (c) son dos ecuaciones del segundo grado con relación á una misma incógnita, que es  $T\gamma$ ; luego si llamamos  $y$  é  $y'$  las dos raíces, tendremos:

$$yy' = -\frac{A_1^2}{1-n^2} = R^2 - x^2 A_1^2$$

de donde:

$$R^2 = x^2 A_1^2 - \frac{A_1^2}{1-n^2}$$

sustituyendo este valor en (d), sale:

$$x = \frac{1}{1-n^2} \text{ y } R^2 = \frac{n^2}{(1-n^2)^2} \cdot A_1^2$$

ó sea:

$$r = \frac{n}{1-n^2} a_1$$

En el caso de  $n = 1$  se tiene  $r = \infty$  y el lugar geométrico es una recta, como también se ve por la ecuación  $2S.\gamma A_1 = A_1^2$ , deducida de (b).

14.- Si en el ejemplo anterior unimos un punto  $P$  de la circunferencia con las dos extremidades del diámetro que pasa por  $O$ , y llamamos  $p$  uno de estos vectores, como se ve en la figura, se tendrá:

$$\begin{aligned} p &= x(1-n)A_1 - \gamma; \text{ pero } A_1 = \gamma - \delta \\ \therefore p &= x(1-n).(\gamma - \delta) - \gamma = x(1-n)\gamma - x(1-n)\delta - \gamma \\ \text{y } p &= \{x(1-n) - 1\} \frac{d}{n} \gamma_1 - x(1-nd).\delta_1 \end{aligned}$$

en que  $\gamma_1$  y  $\delta_1$  son unidades vectoriales, y  $d = T\delta$ ; poniendo  $T\gamma = c$ , la relación anterior da, finalmente:

$$p = -\frac{cd}{c+d}(\gamma_1 + \delta_1)$$

lo que nos dice que  $p$  es la bisectriz del ángulo  $OPA_1$

15.- *Lugar geométrico de la intersección de las diagonales de los rombos que pueden construirse sobre una recta fija de largo invariable.*

Sean  $A$  la recta dada y  $B$  el otro lado no paralelo á  $A$ , de uno cualquiera de los rombos; tomando una de las extremidades de  $A$  por origen, se tiene:

$$\frac{A+B}{2} = \gamma$$

de donde:

$$\gamma^2 - \frac{1}{2}S.AB = \frac{1}{2}A^2$$

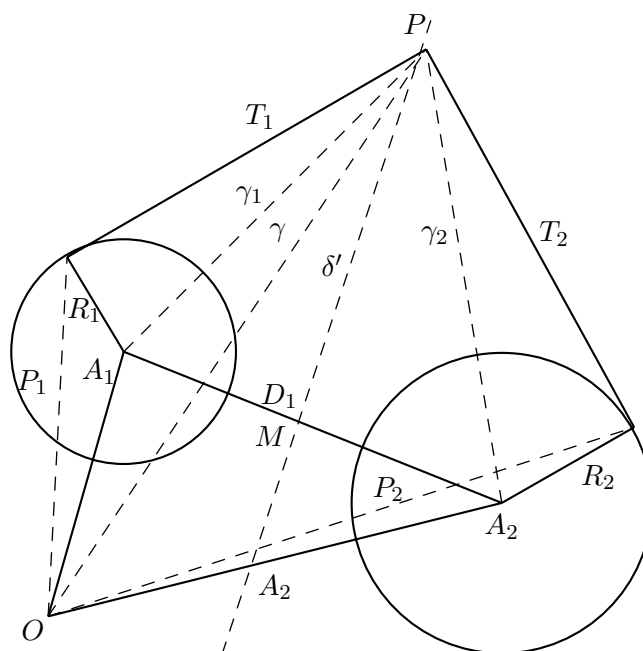
ó bien:

$$\gamma^2 - S\gamma A = 0$$

que es la ecuación de una circunferencia cuyo radio es  $\frac{A}{2}$ .

16.— Ecuación del eje radical de dos circunferencias

V.(1891),  
pág. 5



Sea la notación como lo indica la figura; siendo el eje radical el lugar geométrico de los puntos de intersección de tangentes iguales, tendremos con referencia á un punto cualquiera  $P$ :

$$T_1^2 = T_2^2 = (p_1 - \gamma)^2 = (p_2 - \gamma)^2 \dots\dots (1)$$

de donde:

$$p_1^2 - 2S.p_1\gamma + \gamma^2 = p_2^2 - 2S.p_2\gamma + \gamma^2$$

ó bien:

$$2S.\gamma(p_2 - p_1) = p_2^2 - p_1^2 \dots\dots (2)$$

pero  $p_2 - p_1 = -R_1 + D_1 + R_2$  y  $p_2 = A_2 + R_2$  y  $p_1 = A_1 + R_1$   
 $\therefore 2S.\gamma(-R_1 + D_1 + R_2) = (A_2 + R_2)^2 - (A_1 + R_1)^2$

y desarrollando:

$$2S.\gamma D_1 + 2S.\gamma R_2 - 2S.\gamma R_1 = A_2^2 + 2S.A_2 R_2 + R_2^2 - A_1^2 - 2S.A_1 R_1 - R_1^2$$

ó bien sea:

$$2S.R_2(\gamma - A_2) + 2SR_1(A_1 - \gamma) + 2S.\gamma D_1 = A_2^2 + R_2^2 - A_1^2 - R_1^2$$

$$\text{y } 2S.R_2\gamma_2 - 2S.R_1\gamma_1 + 2S.\gamma D_1 = A_2^2 + R_2^2 - A_1^2 - R_1^2$$

de donde (Ec,10) :

$$2R_2^2 - 2R_1^2 + 2S.\gamma D_1 = A_2^2 + R_2^2 - A_1^2 - R_1^2$$

y finalmente:

$$2S.\gamma D_1 = A_2^2 - A_1^2 + R_1^2 - R_2^2 \dots \dots (14)$$

Si el origen es  $A_1$ , esta ecuación se convierte en

$$2S.\gamma D_1 = D_1^2 + R_1^2 - R_2^2 = \dots \dots (15)$$

(14) y (15) son las ecuaciones del eje radical; ellas corresponden como se ve á la ecuación de una recta perpendicular á la línea que unen los centros, porque tomando dos valores cualesquiera de  $\gamma$ , como  $\gamma$  y  $\gamma'$  (14) ó (15) dan:

$$S.D_1(\gamma - \gamma') = 0$$

lo que dice que el eje radical es perpendicular á  $D_1$ .

Para hallar el punto de encuentro de dicho eje con la línea de los centros, hagamos  $A_1M = B_1$  y  $MA = B$ , ó sea:  $D_1 = B_1 + B_2$ , y tendremos para el caso de  $\gamma_1 = B_1$  y  $\gamma_2 = -B_2$  (Ec. 15):

$$2S.B_1(B_1 + B_2) = D_1^2 + R_1^2 - R_2^2 \dots \dots (a)$$

$$2S.B_2(B_1 + B_2) = D_1^2 - R_1^2 + R_2^2 \dots \dots (b)$$

de donde:

$$2(B_1^2 - B_2^2) = 2(R_1^2 - R_2^2)$$

ó sea:

$$b_1^2 - b_2^2 = r_1^2 - r_2^2 \dots \dots (c)$$

que es la propiedad del eje radical que suele darse como definición del mismo.

Haciendo  $B_1 = n_1 D_1$  y  $B_2 = n_2 D_1$ , se tiene:

$$n_1 = \frac{D_1^2 + R_1^2 - R_2^2}{2D_1^2}$$

$$n_2 = \frac{R_1^2 - R_2^2 - D_1^2}{2D_1^2}$$

y elevando estas expresiones al cuadrado y tomando las diferencias entre ambos cuadrados se obtiene nuevamente á (c).

Comparando la ecuación (15) con (13') se ve que en el caso en que las dos circunferencias se intersecten, el eje radical pasa por los puntos de encuentro; por esta razón se llama también á dicho *eje secante común*.

17.- *Los ejes radicales de tres circunferencias concurren en mismo punto.*

Si en la figura anterior suponemos que  $O$  sea el centro de una tercera circunferencia de radio  $r_2$ , y llamamos  $\varepsilon_1, \varepsilon_2$  y  $\varepsilon_3$  los tres ejes radicales, tendremos:

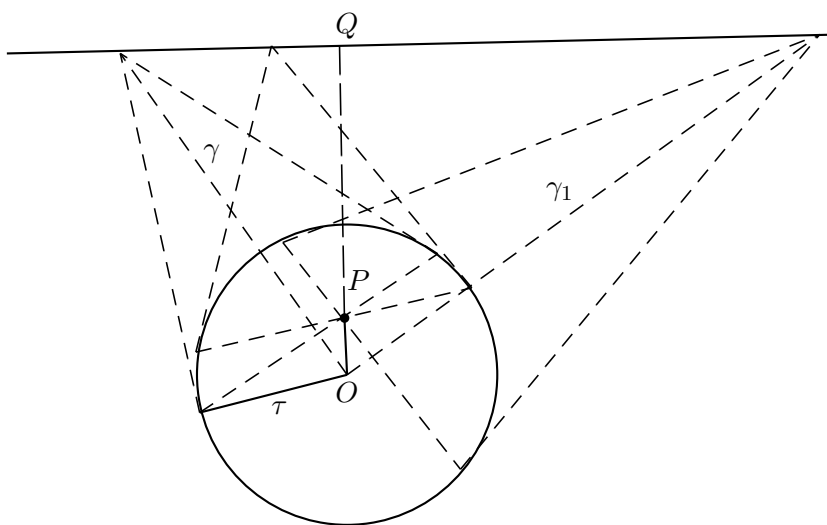
$$\begin{aligned} \text{Ecuación de } \varepsilon_1 &= 2S.\gamma D_1 = A_2 - A_1^2 + R_1^2 - R_2^2 \dots\dots (a) \\ \text{" " } \varepsilon_2 &= 2S.\gamma A_1 = A_1^2 + R_3^2 - R_1^2 \dots\dots (b) \\ \text{" " } \varepsilon_3 &= 2S.\gamma A_2 = A_2^2 + R_3^2 - R_2^2 \dots\dots (c) \end{aligned}$$

Si  $\gamma_1$  es el vector de punto de encuentro de  $\varepsilon_1$  y  $\varepsilon_2$ , sale:

$$2S.\gamma_1(D_1 + A_1) = A_2^2 + R_2^2 - R_2^2$$

por donde vemos que  $\gamma_1$  satisface á (c), ó sea que los tres ejes concurren en un mismo punto llamando *centro radical* con respecto á las circunferencias.

18.- *El lugar geométrico del punto de intersección de las tangentes á una circunferencia en las extremidades de las cuerdas que pasan por un punto fijo es la polar de dicho punto.*



En efecto, llamando  $P$  el punto fijo y  $\gamma$  y  $\gamma_1$  los vectores de los puntos de intersección de dos pares de tangentes, se tiene (*Ec. 11*):

$v_1(1891)$ ,  
pág. 7

$$S.P\gamma = R^2 \dots\dots (a)$$

$$S.P\gamma_1 = R^2 \dots\dots (b)$$

de donde:

$$S.P(\gamma - \gamma_1) = 0 \dots\dots (c)$$

lo que nos dice que la línea que pasa por los puntos de intersección de las tangentes es perpendicular al radio que pasa por  $P$ .

Si suponemos en (a) que  $\gamma$  y  $P$  coincidan en dirección, y llamamos  $l$  la longitud de  $\gamma = OQ$ , se tiene:

$$pl = r^2 \dots\dots\dots (d)$$

Esta relación junto con la (c) corresponden así á la definición de la polar del punto  $P$ .

Si suponemos á  $P$  variable y á  $\gamma$  constante, el punto  $P$  describe la polar del punto correspondiente á  $\gamma$ , y como  $\gamma$  puede ser cualquiera, se sigue *que las polares de todos los puntos de una recta pasan por un mismo punto, que es el polo de la recta.*

19.— *Figura inversa*

Si  $\gamma$  es un vector variable de un lugar geométrico que llamaremos  $c$ , y  $x\gamma = \gamma'$  el vector de un punto  $P$  de  $\gamma$  tal que se tenga  $\gamma\gamma' = -p = -$  una contante, entonces  $c$  y  $c'$ , lugar geométrico de  $P$ , se llaman *figuras inversas*; el origen de vectores es el centro de inversión y la constante  $p$  recibe el nombre de *potencia*.

*La figura inversa de una circunferencia es otra circunferencia ó una recta, según que el centro de inversión esté fuera de la circunferencia ó en ella.*— Sea una circunferencia  $C$  de radio  $r$ ;  $A$  el vector del centro de la misma,  $\gamma_1$  un vector cualquiera de la figura inversa,  $C_1$  y  $p$  la potencia; la ecuación de  $C$  es:

$$\gamma^2 - 2S.\gamma A = R^2 - A^2$$

sustituyendo el valor de  $\gamma = -\frac{p}{\gamma_1}$ , sale:

$$\frac{p^2}{\gamma_1^2} + 2pS.\frac{A}{\gamma_1} = R^2 - A^2$$

y operando con  $\gamma_1^2$ :

$$p^2 + 2PS.\gamma_1 A = \gamma_1^2(R^2 - A^2) \dots\dots (a)$$

ó sea:

$$\gamma_1^2 - \frac{2p}{R^2 - A^2} S.\gamma_1 = \frac{p^2}{R^2 - A^2}$$

luego  $C_1$  es una circunferencia.

llamando  $A_1 = xA$  el vector del centro de  $C_1$  y  $r_1$  su radio, se saca:

$$x = \frac{p}{R^2 - A^2} = \frac{p}{a^2 - r^2}$$

y si  $r$  es el radio del punto de contacto de la tangente trazada á  $C$  desde el origen y  $t$  dicha tangente, tendremos:

$$x = \frac{p}{t^2}$$

Sustituyendo este valor de  $x$  en la expresión

$$R_1^2 = x^2 A^2 + \frac{p^2}{R^2 - A^2} = \frac{p^2}{t^4} + \frac{p^2}{t^2}$$

se tiene:

$$r_1^2 = \frac{p^2}{t^4} a^2 - \frac{p^2}{t^2} = \frac{p^2}{t^4} (a^2 - r^2)$$

ó sea:

$$r_1 = \pm \frac{p}{t^2} \cdot r$$

Si se toma el origen en la circunferencia  $A^2 = R^2$  y  $(a)$  nos da:

$$2S \cdot \gamma_1 A = -p \dots \dots (b)$$

y haciendo  $\gamma_1 = A_1$ , y  $A$  son colineales, resulta:

$$2A_1 A = -p \dots \dots (c)$$

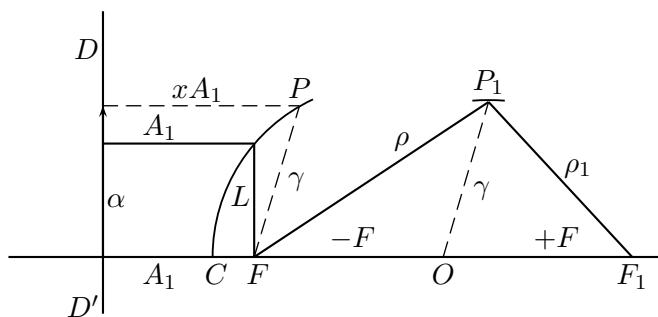
De  $(b)$  también se tiene:

$$S \cdot A(\gamma_1 - \gamma_2) = 0 \dots \dots (d)$$

$(b)$  y  $(d)$  nos dicen que estando el origen en la circunferencia, la figura inversa de  $C$  es una recta perpendicular á la línea que une el origen con el centro; la ecuación  $C$  da la distancia del origen al pie de dicha perpendicular.

20.- Secciones cónicas

Estas, como se sabe, pueden definirse:



diciendo que son el lugar geométrico de un punto que se mueve en un plano sujeto á la condición que sea constante la razón de sus distancias á un punto y á una línea fijos.

Según esto, sean como en la figura,  $DD'$  la directriz,  $F$  el foco y  $\varepsilon$  la excentricidad de la cónica; la figura nos da, con referencia al punto  $P$ :

V.,(1891),  
pág. 9

$$A_1 + \alpha - xA_1 = \gamma$$

y operando con  $S.A_1$

$$A_1^2 - xA_1^2 = S.A_1\gamma \dots\dots (a)$$

pero según la definición de la curva,  $\frac{l}{a_1} = \frac{T\gamma}{xA_1} = \varepsilon$ ; de donde:  $x = \frac{T\gamma}{l}$ ; sustituyendo este valor en (a) sale:

$$a_1T\gamma = (S.A_1\gamma - A_1^2).\varepsilon$$

y elevando al cuadrado:

$$a_1^2(T\gamma)^2 = (S.A_1\gamma - A_1^2)^2.\varepsilon^2$$

ó sea:

$$A_1^2\gamma^2 = (S.A_1\gamma - A_1^2)^2.\varepsilon^2 \dots\dots (b)$$

que es la ecuación de la elipse ó de la hipérbola, según que  $\varepsilon$  sea mayor ó menor que la unidad, y la de la parábola si  $\varepsilon = 1$ .

Estas ecuaciones también puede obtenerse directamente; si volvemos á la figura y suponemos, por ejemplo, que  $P_1$  pertenezca á una elipse, tendremos, de conformidad con una propiedad bien conocida de esta curva, y llamando  $2a$  el eje mayor:

$$Tp + Tp_1 = \sqrt{-p^2} + \sqrt{-p_1^2} = 2a$$

y reemplazando los valores:  $p = \gamma + F$  y  $p_1 = \gamma - F$ , resulta:

$$\sqrt{-(\gamma + F)^2} + \sqrt{-(\gamma - F)^2} = 2a$$

de donde:

$$-(\gamma + F^2) = 4a^2 - 4a\sqrt{-(\gamma - F)^2} - (\gamma - F)^2$$

y desarrollando sale:

$$S.F\gamma + a^2 = a\sqrt{-(\gamma - F)^2}$$

elevando al cuadrado, se obtiene:

$$S.F\gamma + a^4 = -a^2(\gamma^2 + F^2)$$

pero  $a^2F^2 = -\varepsilon^2a^4$ , porque  $\frac{f}{a} = \varepsilon$

$$\therefore (S.F\gamma)^2 + a^2\gamma^2 = -a^4(1 - \varepsilon^2) \dots\dots (c)$$

que es la ecuación de la elipse, siendo el centro el origen de vectores.

Llamando  $b$  el semieje menor, y haciendo en (c)  $\gamma = b$ , sale:

$$b^2 = a^2(1 - \varepsilon^2)$$

Si hacemos en (b)  $\gamma = nA_1$  se tiene:

$$n^2a_1^4 = (nA_1^2 - A_1^2)^2.\varepsilon^2 = (n - 1)^2.A_1\varepsilon^2$$

de donde:

$$n = \pm\varepsilon(n - 1) \text{ y } n = \frac{-\varepsilon}{1 - \varepsilon} \text{ ó } n = \frac{\varepsilon}{1 + \varepsilon}$$

luego  $\frac{\varepsilon a_1}{1 + \varepsilon}$  es el tensor del vector  $FC$ ; llamando  $p$  este número, se tiene:

$$p + f = a = \frac{\varepsilon a_1}{1 + \varepsilon} + a\varepsilon$$

de donde, para la elipse:

$$a_1 = \frac{a(1 - \varepsilon^2)}{\varepsilon}$$

De análogo modo se deducen las demás relaciones entre los elementos de la elipse ó los de las otras cónicas.

21.— *Ecuación de la esfera*

Comparando la ecuación (3) con la (3') vemos que las ecuaciones del plano y de la recta tienen idéntica forma; la diferencia consiste en que en la de esta última los vectores no están sujetos á la condición de permanecer en un plano dado, no existiendo esta restricción al tratarse de la ecuación del plano.

Lo mismo se verifica con respecto á la circunferencia y á la esfera, de modo que la ecuación de ésta es:

$$\gamma^2 - 2S.A\gamma = R^2 - A^2$$

en la cual los vectores no están sujetos á la condición de ser coplanales, como sucede en el caso de la circunferencia. De esto se desprende que la ecuación

$$S.\gamma R = R^2$$

también representa el plano tangente á la esfera de radio  $r$ , y la

$$S.\gamma A = R^2$$

el plano de los contactos (*Ec.* 11)

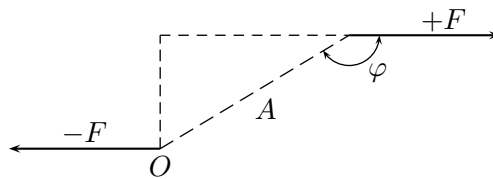
En general, podemos generalizar las relaciones obtenidas para la circunferencia al caso de la esfera; así, la ecuación (d) del ejercicio 18 nos dice que *el radio de una esfera es un medio proporcional entre las distancias del centro al polo y al plano polar*; según el ejercicio 17 vemos que *los planos radicales de tres esferas pasan por una misma línea*; y según el 19, que *la figura inversa de una esfera es otra esfera ó un plano etc.*

Con los ejercicios que preceden, el estudiante podrá familiarizarse con los métodos elementales del cálculo de los cuaternios, y fácil le será extender las aplicaciones á casos más complicados.

62.- Daremos fin á nuestra tarea con el siguiente ejemplo de la aplicación de los vectores á la Estática.

Sean dos fuerzas asimiladas á los dos vectores  $F$  y  $-F$ , y llamemos además  $A$  el vector del punto de aplicación de la primera con referencia al punto de aplicación de la segunda tomando por origen, y  $\phi$  el ángulo comprendido entre una de las fuerzas y  $A$ .

Sabemos que la acción ejercida sobre un cuerpo por un par de fuerzas paralelas, de una misma intensidad y de opuestas direcciones, depende unicamente del *momento del par*, del plano en que se hallan situadas las fuerzas que lo componen, y de la dirección del movimiento que dichas fuerzas tienden á imprimir al cuerpo. Ahora bien, la expresión  $\pm VAF = \pm TA.TF \sin \phi . \varepsilon_1$  encierra los tres elementos que acabamos de indicar; en efecto, el tensor de  $VAF$ , ó sea  $TA.TF \sin \phi$  equivalen al momento del par;



V, (1891),  
pág. 11

el vector unitario  $\varepsilon_1$  da el eje del plano, y los signos se establecen como es sabido, con arreglo á la convención que se adopte acerca de la dirección del movimiento.

De lo expuesto se ve que *los pares* pueden ser representados por medio de vectores; una vez asimilados aquéllos á éstos, la composición y descomposición de los primeros se reducen á una suma vectorial, de modo que un sistema de *pares* en equilibrio puede representarse por medio de un polígono cerrado, plano ó no, cuyos lados son los vectores representativos de los *pares*. (*V. Rankine, Applied Mechanics.*) PEDRO J. SOSA.

Panamá, Diciembre 25 de 1889.