
This is a reprint from
Revista de la Academia Colombiana de Ciencias
Vol. 28 (108) (2004), 363-369

EL PRINCIPIO DE MAUPERTUIS. UN ENSAYO PARA UNA ACADEMIA

por

William A. Ponce

EL PRINCIPIO DE MAUPERTUIS. UN ENSAYO PARA UNA ACADEMIA

por

William A. Ponce¹

Resumen

William A. Ponce: El principio de Maupertuis. Un ensayo para una Academia. Rev. Acad. Colomb. Cienc. **xx** (xx): xxx–xxx, 2003. ISSN 0370-3908.

El físico y matemático francés **Pierre Louis de Maupertuis** enunció, en 1744 ante la academia de ciencias de París y dos años más tarde ante la Academia de Ciencias de Prusia, uno de los principios más fundamentales de las ciencias naturales: el principio de mínima acción. En este ensayo hacemos un recuento histórico de este principio desde sus orígenes en la escuela de Mileto, hasta sus más recientes aplicaciones en la Química y en la Mecánica Cuántica.

Palabras clave: Mínima acción, mecánica cuántica.

Abstract

The French physicist and mathematician **Pierre Louis de Maupertuis** enunciated, in 1744 at the Paris Academy of Sciences and two years later at the Prussian Academy of Sciences, a scientific dictum that was destined to gain greatest prominence in natural sciences: the famous principle of least action. In this essay we present an historical review of this principle from its beginning at the Milesian School, until its most recent applications in Chemistry and Quantum Mechanics.

Key words: Minimal action, Quantum Mechanics

1. Enunciado del Principio

En el año de 1744 el físico y matemático francés **Pierre Louis Moreau de Maupertuis** (Saint Malo, 1698-Basilea, 1759) presentó, ante los miembros de la Academia de Ciencias de París y dos años más tarde ante los

miembros de la Academia de Ciencias de Prusia, el principio de la mínima cantidad de acción. En el más estricto sentido Platónico y Pitagórico y dentro del espíritu de las teorías de **Leibniz**, enunció que “*la Nature, dans la production de ses effects, agit toujours par les moyens*

¹Instituto de Física, Universidad de Antioquia, A.A. 1226. Medellín, Colombia. e-mail: wponce@fisica.udea.edu.co

le plus simples" [9], simplicidad que induce la naturaleza a que actúe de tal manera que, una cierta cantidad que el llamó acción, tome valores mínimos. En sus propias palabras: "*Lorsqu'il arrive quelque changement dans la Nature, la quantité d'action, nécessaire pour ce changement, est la plus petite qu'il soit possible*" [9]. Igualmente Maupertuis postuló que la acción debe ser función de la masa, la velocidad y la distancia.

Formulado de la manera anterior, el principio de Maupertuis tiene más un carácter metafísico que físico, sin embargo contiene el sustrato de uno de los principios más fundamentales de las ciencias naturales, como veremos en el resto de este estudio.

2. Los Antecedentes.

El filósofo **Herón** de la escuela neoplatónica de Alejandría, fué el primero en formular por allá por el año 125 a.c., y de manera matemática, un principio de mínima acción aplicado a la luz y a su reflexión especular. En su tratado de los espejos planos y curvos llamado "La Catóptrica" (atribuido antiguamente a Tolomeo), **Herón** mostró, haciendo uso de la geometría, que cuando un rayo de luz es reflejado por un espejo, la trayectoria que este sigue del objeto al ojo del observador, es más corta que cualquier otra trayectoria posible. De aquí concluyó que la luz se mueve de un lugar a otro en línea recta y que en la reflexión, el ángulo de incidencia es igual al ángulo de reflexión. Es asombroso que este principio aún esté vigente y aparezca en los textos de óptica sin hacer siquiera mención a su origen.

Hoy podemos mirar el razonamiento de **Herón** como la consecuencia y el desarrollo lógicos de las doctrinas pitagóricas, las cuales tienen sus raíces en análisis hechos por la **Escuela de Mileto** allá por los años 600-520 a.c. (Tales, Anaximandro, Anaxímenes y Aristides). Estos Fisiologistas Iónicos postularon la existencia de un sustrato único del cual se derivaban todas las sustancias que componían el cosmos.

Por su parte **Pitágoras** (c. 530 a.c.) y los pitagóricos (Platón y Aristóteles) consideraron que los números eran las entidades fundamentales que gobernaban el universo. En especial la tetralogía de la decena expresada por la igualdad $1+2+3+4=10$ les permitía alcanzar la perfección implícita en el contexto del número 10. Así pues, **Pitágoras** utilizando los números enteros obtiene las leyes fundamentales de la acústica, las que junto con la geometría le permite formular la armonía de las esferas, en donde los cuerpos celestes, perfectamente esféricos, giran en órbitas simétricas produciendo una

armonía de belleza trascendental a la cual el ser humano ha crecido sordo.

La tetralogía de la decena llevó también a los pitagóricos a formular la astronomía. Según esa ciencia, a las estrellas fijas en el cielo se le sumaban los 10 planetas: siete esferas pesadas moviéndose en círculos (figuras geométricas perfectas) a las cuales se les sumaba la tierra y dos cuerpos celestes más, no visibles llamados Hetsia y Contratierra.

De esta manera los primeros físicos: **Arquímedes, Herón y Tolomeo**, basaron sus descubrimientos en principios de simplicidad, uniformidad y orden, los que conllevan implícito el principio de perfección y de economía de la naturaleza en su evolución.

Muchas de estas ideas de los pitagóricos fueron retomadas por los escolásticos en la edad media y no es de extrañarnos que uno de los defensores más acérrimos que ha tenido en todos los tiempos el postulado de simplicidad haya sido el clérigo **William de Ockham** (c. 1300-1347) quien afirmaba categóricamente la inutilidad de emplear varios principios cuando se tenía que con uno era suficiente. Claro, todo esto en el marco de la Teología y de la Ontología, las ciencias fundamentales de la edad media.

De esta manera llegamos al siglo XVII y encontramos la primera formulación de un principio de mínima acción por el matemático francés **Pierre de Fermat**, (Beaumont de Lomagne, 1601-Castres, 1665) quien afirmaba que sin importar a que clase de reflexión o de refracción estaba sometido un rayo de luz, este viajaba de un lugar a otro de tal manera que el tiempo empleado en hacerlo era mínimo (el razonamiento de **Herón** se refería solo al caso particular de la reflexión especular). Vale la pena anotar que tanto **Herón** como **Fermat** llegaron a sus conclusiones de una manera intuitiva y no como resultados de observaciones experimentales.

Un análisis matemático preliminar de este principio lo hizo **Fermat** utilizando la óptica geométrica a cuyo desarrollo contribuyó ese autor grandemente. Sin embargo la demostración completa del principio le corresponde hacerla el astrónomo y matemático holandés **Cristian Huygens** (La Haya, 1629- id. 1695) quien deduce, basado en la teoría ondulatoria de la luz, que el índice de refracción entre dos medios es igual al cociente de las velocidades de la luz en cada uno de ellos [6].

3. Formulación matemática.

El principio de mínima acción fué publicado por

primera vez como un teorema dinámico exacto en 1744 (el mismo año en que Maupertuis lo enunció en París) por el matemático suizo **Leonhard Euler** (Basilea, 1707-San Petersburgo 1783), quien se limitó al caso de una partícula puntual mecánica, moviéndose en una curva de un plano. Su afirmación consistía en que cuando una partícula se movía entre dos puntos fijos, lo hacía de tal manera que la cantidad $\int vds$ era mínima[2], donde v era la velocidad de la partícula y ds el elemento infinitesimal de línea. Asumiendo que la masa m de la partícula es una constante se puede escribir

$$\begin{aligned}
 S &= m \int vds = \int mvds \\
 &= \int pds = \int \sqrt{2m(E - V)}ds,
 \end{aligned}
 \tag{1}$$

donde p es el momentum lineal y E y V son las energías total y potencial respectivamente del sistema físico.

De esta manera **Euler** enunció como teorema matemático lo que para **Maupertuis** era solo una afirmación categórica.

El siguiente desarrollo le corresponde hacerlo al astrónomo francés de origen italiano **Joseph-Louis, conde de Lagrange** (Turin, 1736-París, 1813) quien en 1760 postula la existencia de una función $L(q, \dot{q}; t)$, donde q es una coordenada generalizada y \dot{q} es la derivada temporal de esa coordenada. Esto permitía escribir las ecuaciones de movimiento del sistema físico (ecuaciones de Newton) en la forma:

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} - \frac{\partial L}{\partial q} = 0,
 \tag{2}$$

conocida hoy en día como la ecuación de Euler-Lagrange. El concepto fundamental introducido aquí por **Lagrange** es el de coordenada generalizada[7], el cual trasciende el concepto de coordenadas cartesianas manejado por **Sir Isaac Newton**.

En este punto todas las ideas fundamentales estaban ya planteadas, sin embargo faltaba el desarrollo matemático más importante en este campo el cual le correspondió hacerlo un siglo después al matemático irlandés **Sir William Rowan Hamilton** (Dublin, 1805-Dunsink, 1865), quien obtuvo los siguientes resultados[4]:

- $L(q, \dot{q}; t) = E_K - V$, con E_K la energía cinética del sistema.
- Utilizando la anterior definición de L y la Ec.(2), fué solo un asunto de algebra probar la conservación de la energía.

- Definió la acción S como la constante $S = \int_{t_1}^{t_2} L(q, \dot{q}; t)dt$.
- Mostró que al variar la coordenada generalizada en una cantidad δq y exigir que bajo esta variación la acción S permaneciera estacionaria ($\delta S = 0$), obtenía la ecuación de Euler-Lagrange (Ec. (2)), siempre y cuando se satisficieren las condiciones de frontera $\delta q(t_1) = \delta q(t_2) = 0$.
- Definió el momentum canónico conjugado a la variable q_r como $p_r = \partial L / \partial \dot{q}_r$ y redujo las n ecuaciones diferenciales de segundo orden para las n coordenadas generalizadas, a $2n$ ecuaciones diferenciales de primer orden.

El principio de mínima acción adquiere de esta manera su formulación matemática definitiva, teniendo la capacidad de reproducir las ecuaciones de movimiento de la mecánica clásica y sus leyes de conservación. El movimiento de un sistema mecánico está pues completamente determinado por el principio de mínima acción: resolviendo las ecuaciones del movimiento que se deducen de este principio, se puede hallar la forma de la trayectoria, así como la posición sobre la trayectoria en función del tiempo.

Aunque el cuadro estaba completo, aún faltaba un desarrollo más, el cual le correspondió hacerlo al matemático alemán **Karl Gustav Jacob Jacobi** (Postdam, 1804-Berlín, 1851) quien mostró que la evolución temporal de la acción S estaba dada por una ecuación diferencial de primer orden llamada la ecuación de Hamilton-Jacobi, la cual es

$$\frac{\partial S}{\partial t} + H(q_r, p_r = \partial S / \partial q_r, t) = \frac{\partial S}{\partial t} + \frac{(\nabla_q S)^2}{2m} + V = 0,
 \tag{3}$$

y que la diferencial total de la acción como función de las coordenadas y del tiempo se puede expresar como

$$dS = \sum_r p_r dq_r - H dt,
 \tag{4}$$

donde H es la función principal de Hamilton o Hamiltoniana la cual está definida via una transformación de Legendre como $H = \sum_r q_r p_r - L$. Nótese la similitud que presenta la ecuación (3) de Hamilton-Jacobi con la ecuación de Schrödinger de la Mecánica Cuántica, similitud que vamos a elaborar más adelante.

Finalmente anotemos que bajo la suposición que la Lagrangiana (y por tanto la Hamiltoniana) de un sistema mecánico no dependen explícitamente del tiempo, $H(p_r, q_r) = E$ es la energía total del sistema, una constante, en cuyo caso la acción de Hamilton-Jacobi se reduce a la acción de Euler en la Ec.(1), llamada la acción reducida en la literatura moderna.

4. Aplicaciones en la física clásica

4.1. Formulación relativista. Que la energía cinética se exprese como $m\dot{q}^2/2$ es solo una aproximación para el caso en que $\dot{q} \ll c$, con c la velocidad de la luz en el vacío (una constante universal). El utilizar esta expresión para la energía cinética conduce a expresiones incompatibles con la teoría de la relatividad especial.

Una fórmula para la energía cinética compatible con la relatividad especial sería:

$$E_{KR} = m_0 c^2 \left(1 - \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} \right), \quad (5)$$

la cual, con m_0 la masa en reposo de la partícula, corresponde a la expresión relativista de la energía cinética. De esta manera una Lagrangiana covariante se debe escribir como $L = E_{KR} - V$ quedando el Hamiltoniano invariante.

4.2. Aplicación a la electrodinámica. La ecuación de movimiento de una partícula cargada en un campo electromagnético está dada por la fuerza de Lorentz la cual podemos escribir como:

$$\dot{\mathbf{P}}' = e[\mathbf{E} + \frac{1}{c}(\dot{\mathbf{r}} \times \mathbf{H})] = e[-\nabla\phi - \frac{d\mathbf{A}}{cdt} + \sum_s \frac{\dot{x}_s}{c} \nabla A_s], \quad (6)$$

donde \mathbf{E} y \mathbf{H} son el campo eléctrico y magnético respectivamente, \mathbf{P}' es la variable canónica conjugada a \mathbf{r} y e es la carga eléctrica de la partícula. En el lado derecho de la Ec.(6) se ha expresado la fuerza de Lorentz en función de los potenciales escalar ϕ y vectorial \mathbf{A} , los cuales están relacionados con \mathbf{E} y \mathbf{H} por las ecuaciones $\mathbf{E} = -\nabla\phi - \partial\mathbf{A}/\partial(ct)$ y $\mathbf{H} = \nabla \times \mathbf{A}$.

Para obtener la Ec.(6) como una consecuencia de las ecuaciones de Euler-Lagrange necesitamos definir un Lagrangiano de la forma:

$$L = E_{KR} - e\phi + \frac{e}{c} \mathbf{A} \cdot \dot{\mathbf{r}}, \quad (7)$$

con E_{KR} dado en la Ec.(5). Este Lagrangiano nos permite calcular el momentum canónico conjugado a la variable \mathbf{r} como $\mathbf{P}' = \mathbf{p} + \frac{e}{c} \mathbf{A}$; [$\mathbf{p} = m\dot{\mathbf{r}}(1 - v^2/c^2)^{-1/2}$]. Un álgebra sencilla nos permite entonces hallar la fuerza de Lorentz (6) utilizando el Lagrangiano L en (7) via las ecuaciones de Euler-Lagrange, para $q_a = (x, y, z)$ en coordenadas cartesianas.

4.3. Otras Aplicaciones. El principio de mínima acción se ha aplicado en casi todas las áreas de la física clásica. Sin entrar en detalles, mencionemos solo que el

principio se ha aplicado de manera exitosa en la teoría de la elasticidad, en hidrodinámica, en astrofísica, en relatividad general y en la termodinámica.

5. Generalizaciones matemáticas

Varias generalizaciones matemáticas al principio de mínima acción son posibles. Veamos enseguida dos de ellas.

5.1. Caso de varias variables. Para generalizar el problema consideremos el caso de una función de n variables independientes t_1, t_2, \dots, t_n y l variables dependientes q_1, q_2, \dots, q_ℓ y partamos de la función

$$f(t_1, t_2, \dots, t_n, \partial q_1/\partial t_j, \partial q_2/\partial t_j, \dots, \partial q_l/\partial t_j,) \equiv f(t_i, \partial q_a/\partial t_j),$$

$$i, j = 1, 2, \dots, n; a = 1, 2, \dots, \ell.$$

Nuestra intención es hallar funciones $q_1 = q_1(t_i)$, $q_2 = q_2(t_i)$, \dots , $q_\ell = q_\ell(t_i)$ para las cuales

$$\int dt_1 dt_2 \dots dt_n f(t_i, \partial q_a/\partial t_j)$$

es estacionaria con respecto a pequeñas variaciones $\delta q_1, \delta q_2, \dots, \delta q_\ell$ de las variables dependientes. La integral debe ser tomada sobre una región fija de las variables independientes y los valores de las variables dependientes en la frontera de esa región se consideran fijos. Las ℓ ecuaciones de Lagrange para este problema están dadas por

$$\sum_{i=1}^n \frac{\partial}{\partial t_i} \left(\frac{\partial f}{\partial (\partial q_a/\partial t_i)} \right) - \frac{\partial f}{\partial q_a} = 0, \quad (8)$$

que constituyen un conjunto de ℓ ecuaciones lineales para $a = 1, 2, \dots, \ell$.

5.2. Caso de variables continuas. Supóngase que en lugar de tener un conjunto finito (o infinito contable) de variables discretas q_a , $a = 1, 2, 3, \dots$ lo que tenemos es una función $\phi(x)$ que depende de una variable real y continua x . Además supongamos que existe una densidad funcional $F(\phi, \dot{\phi}, \partial\phi/\partial x; t)$, la cual nos permite definir la integral $I = \int dx dt F(\phi, \dot{\phi}, \partial\phi/\partial x; t)$ que es estacionaria ($\delta I = 0$) bajo la transformación $\phi \rightarrow \phi' = \phi + \delta\phi$.

La aplicación directa del cálculo de variaciones desarrollado en los numerales anteriores nos permite llegar ahora a la siguiente ecuación de Euler-Lagrange, la cual se aplica cuando los grados de libertad son continuos:

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial F}{\partial \dot{\phi}} + \frac{d}{dx} \frac{\partial F}{\partial \partial\phi/\partial x} - \frac{\partial F}{\partial \phi} = 0. \quad (9)$$

Lo anterior es la manera de aplicar el principio de mínima acción para lo que llamamos un campo $\phi(x)$ el cual depende de una sola variable x . El análisis anterior se puede generalizar a una función de tres (o mas) variables $\phi(x, y, z)$, obteniéndose una ecuación similar a la ecuación (9) en la que el término central toma la forma $\nabla \cdot [\partial F / \partial (\nabla \phi)]$.

6. Aplicaciones en la física moderna

6.1. Usos en mecánica cuántica antigua. La vieja teoría cuántica tiene sus orígenes en el modelo que ideó **Max Planck** para explicar la radiación del cuerpo negro, la explicación del efecto fotoeléctrico hecha por **Albert Einstein** y en el modelo atómico de **Niels Bohr**. En las tres explicaciones se parte de la hipótesis que la radiación electromagnética está cuantizada y que es un múltiplo de $h\nu$, donde ν es la frecuencia de la radiación y h es una constante universal llamada la constante de Plank.

Esta cuantización de la radiación electromagnética se puede derivar del principio de **A. Sommerfeld**[11] y **W. Wilson**[12] quienes postulan que la acción S asociada con la emisión de esa radiación no solo es estacionaria (una constante) si no que es un múltiplo de h . Es decir:

$$S = \oint pdq = nh, \tag{10}$$

con $n = 1, 2, 3, \dots$ un número entero. De esta manera nuestra conocida integral de acción entra en la teoría cuántica.

6.2. Usos en mecánica cuántica moderna. Para empezar supongamos que se tiene un sistema físico cuya acción está dada por

$$S = -i\hbar \ln \psi(x, y, z; t) \tag{11}$$

en donde $\hbar = h/2\pi$ es constante. La ecuación de Hamilton-Jacobi para esta acción toma entonces la forma:

$$-i\hbar \psi \frac{\partial \psi}{\partial t} - \frac{\hbar^2}{2m} \nabla \psi \cdot \nabla \psi + V\psi^2 = G(\psi, \dot{\psi}, \nabla \psi, t) = 0. \tag{12}$$

Esta ecuación que se aplica cuando la acción S es real, debe modificarse cuando la acción (y la función ψ) es una función compleja. Proponemos entonces considerar

la siguiente ecuación para el caso de una función compleja ψ de variables reales x, y, z :

$$-i\hbar \psi^* \frac{\partial \psi}{\partial t} - \frac{\hbar^2}{2m} \nabla \psi^* \cdot \nabla \psi + V\psi^* \psi = G(\psi, \psi^*, \dot{\psi}, \dot{\psi}^*, \nabla \psi, \nabla \psi^*; t) = 0. \tag{13}$$

Si pedimos ahora que

$$\int dV dt G'(\psi, \psi^*, \dot{\psi}, \dot{\psi}^*, \nabla \psi, \nabla \psi^*; t) = 0$$

(sea estacionaria), con $G' = G + a \frac{\hbar^2}{2m} \nabla \cdot (\psi \nabla \psi^* - \psi^* \nabla \psi)$, $dV = dx dy dz$ y variamos de manera independiente ψ y ψ^* , entonces la aplicación de la ecuación (9) para ψ^* y $a = 1$ nos produce la ecuación:

$$i\hbar \frac{\partial \psi}{\partial t} = -\frac{\hbar^2}{2m} \nabla^2 \psi + V\psi, \tag{14}$$

la cual es la ecuación de Schrödinger para un sistema físico descrito por la función de onda

$$\psi = e^{(iS/\hbar)}. \tag{15}$$

Este resultado sorprendente no es más que la equivalencia que se da entre la ecuación de Hamilton-Jacobi y la ecuación de Schrödinger en un mundo controlado por un principio general de mínima acción. De esta manera hemos derivado la ecuación de Schrödinger bajo la hipótesis que la acción de todo sistema físico está dada por una función compleja de la forma que aparece en la ecuación (11).

7. Desarrollos contemporáneos

De la función de onda en la Ec.(15) podemos derivar toda la mecánica cuántica. Veamos:

7.1. Aproximación semiclásica. Si en la función de onda $\psi(x) = \exp [iS(x)/\hbar]$ se toma $S = S_{clas} = \int \sqrt{2m(E - V)} dx$, se obtiene la llamada aproximación WKB de la mecánica cuántica o también llamada aproximación semiclásica, la cual es de gran utilidad cuando se trabaja con sistemas físicos de números cuánticos muy grandes. Un estudio completo y pedagógico de esta aproximación y algunas de sus aplicaciones se puede encontrar en el capítulo VII del libro de “Mecánica Cuántica. Teoría no Relativista” de **L. D. Landau** y **E. M. Lifshitz** [8].

7.2. Derivación de la integral de trayectoria. Hoy creemos que el modelo matemático más correcto y que nos permite describir de manera adecuada el micromundo, es el conocido en la literatura científica como “la integral de trayectoria”. En esta sección haremos una

derivación de esa técnica haciendo uso de los resultados anteriores.

Si en la evolución de un sistema físico unidimensional desde el punto $x_I(t_I)$ hasta el punto $x_{II}(t_{II})$ postulamos que todas las trayectorias matemáticas son posibles e igualmente probables, entonces la función de onda asociada a una cualquiera de esas trayectorias estará dada por $\psi(x) = \exp[iS_{tr}(x)/\hbar]$ donde $S_{tr} = \int_{t_I}^{t_{II}} L(x, \dot{x}; t) dt$ es la acción asociada con esa trayectoria (nótese que en general $\delta S_{tr} \neq 0$ ya que la acción que es mínima es una sola, la cual es S_{clas} , la acción de la trayectoria del sistema clásico).

De conformidad al principio de superposición de la mecánica cuántica (véase el Capítulo I de la Ref. [8]) tenemos que para un tiempo arbitrario t_r tal que $t_I < t_r < t_{II}$, un estado cualquiera del sistema físico podemos escribirlo como $|\rangle = \int dx_r \psi(x_r, t_r) |x_r\rangle$, donde $\psi(x_r, t_r)$ es la función de onda del sistema físico en el tiempo t_r y $|x_r\rangle$ representa un estado físico en la posición x_r en cualquier instante de tiempo (llamado en la literatura un estado estacionario).

Dividiendo ahora el intervalo de tiempo entre t_I y t_{II} en un número entero n de intervalos iguales $[\Delta t = (t_{II} - t_I)/n]$, entonces

$$|x_{r+\Delta t}\rangle \approx \int dx_r \psi(x_{r+\Delta t}) |x_r\rangle = \int dx_r \exp\left(\frac{i}{\hbar} \int_{t_r}^{t_r+\Delta t} L dt\right) |x_r\rangle, \quad (16)$$

en donde la aproximación se convierte en una igualdad para el caso en que $n \rightarrow \infty$.

Iterando dos veces la ecuación anterior podemos escribir

$$|x_{(r+2\Delta t)}\rangle \approx \int dx_r \int dx_{(r+\Delta t)} \psi(x_{r+\Delta t}) \psi(x_{\Delta t+2\Delta t}) |x_r\rangle \quad (17) \\ = \int dx_{(r+\Delta t)} dx_r \exp\left(\frac{i}{\hbar} \int_{t_r}^{t_r+2\Delta t} L dt\right) |x_r\rangle.$$

Iterando un número infinito de veces obtenemos que la amplitud de transición entre el estado $|x_I(t_I)\rangle$ y el estado $|x_{II}(t_{II})\rangle$ está dada por la integral múltiple (infinitas trayectorias cada una subdividida en infinitos infinitesimales):

$$\langle x_{II} | x_I \rangle = \frac{1}{N} \int \int \dots \int \exp\left[\frac{i}{\hbar} \int_{t_I}^{t_{II}} L dt\right] \delta x_r(t) \quad (18)$$

donde $\delta x_r(t) = dx_1 dx_2 dx_3 \dots$ un número infinito de infinitesimales sobre los que tenemos que integrar. El factor $1/N$ es un factor combinatorio que se obtiene por normalización.

La integral que aparece en la ecuación (18) es una integral de un número infinito no contable de variables y es conocida en la literatura matemática como la medida de Winner (generalización de la llamada medida de Lebesgue) y supone técnicas matemáticas de análisis funcional que están fuera de este ensayo, pero que son bastante bien conocidas en la literatura científica.

Esta técnica de integrales de trayectoria, introducida por primera vez en la mecánica cuántica por **P.A.M. Dirac**[1], desarrollada en su trabajo de tesis doctoral por **Richard P. Feynman**[3] y elaborada posteriormente por **J. Schwinger**[10], es la manera correcta de trabajar la mecánica cuántica de cualquier sistema físico.

La forma de calcular la integral en la ec.(18) y de derivar de ella toda la mecánica cuántica se encuentra desarrollada de una manera didáctica y elegante en el libro de **R. P. Feynman** y **A. R. Hibbs** publicado en 1965[3].

7.3. Aplicaciones a la termodinámica y a la química. Han sido varios los intentos de derivar algunos principio termodinámicos de un principio variacional. **Helmholtz** por ejemplo presentó ante la academia de ciencias de Berlín una derivación de la segunda ley de la termodinámica de un principio variacional, a través de una analogía mecánica[5]. Igualmente mostró que para procesos reversibles, la función de Lagrange es equivalente a la energía libre de Helmholtz.

Más recientes han sido las aplicaciones en la química, en donde al considerar las reacciones químicas como el movimiento de un punto a lo largo de un espacio matemático de reacción unidimensional η , es posible identificar, para procesos no reversibles y acelerados, la energía libre de Gibbs G como la función de Lagrange[12]. En este caso G es función de η , su velocidad $v = d\eta/dt$, de su aceleración $\dot{v} = d^2\eta/dt^2$ y del tiempo t . Lo anterior nos conduce a definir un momento químico como $p_{ch} = \partial G/\partial v$.

8. Conclusiones

Para terminar este ensayo quiero resaltar la belleza extrema e inspiradora que constituye el hecho que, todas las leyes fundamentales de la física clásica puedan

entenderse en términos de una construcción matemática llamada la acción. Las ecuaciones de movimiento y las leyes de conservación son aquellas que se derivan de minimizar dicha acción.

Igualmente y como se mostró en la sección anterior, es posible, aunque con una matemática un poco más sofisticada, derivar los principios fundamentales de la Mecánica Cuántica, en donde la ecuación de Schrödinger aparece como una consecuencia de aplicarle la condición de Euler-Lagrange a la ecuación de Hamilton-Jacobi para una acción específica, la cual juega un papel fundamental en la derivación de la integral de trayectoria.

Es importante resaltar que la equivalencia mostrada en el texto principal entre la ecuación de Schrödinger y la ecuación de Hamilton-Jacobi es, hasta donde este autor conoce, inédita en la literatura científica. De ser así, entonces la derivación de la Integral de trayectoria como se hace en la sección 7.2, tiene también un grado alto de originalidad.

Referencias

- [1] **Dirac P. A. M.**, “*The principles of Quantum Mechanics*”, (Oxford U. Press, Oxford, England, First Edition, 1947)
- [2] **Euler L.**, “*Methodus inveniendi lineas curvas maximi minime proprietate gaudentes, additamentum II*” (Opera omnia, Editor C. Carathéodory, París, 1952), series I, vol. 24, pp. LII-LV, 298-308.
- [3] **Feynman R. P. and Hibbs A. R.**, “*Quantum Mechanics and Path Integrals*” (McGraw Hill B.C., New York, First Edition, 1965).
- [4] **Hamilton W. R.**, “*On a general method in dynamics*”, Trans. Roy. Soc., (1834), 247; “*Second essay on a general method in dynamics*”, *ibid.*, (1835), 35.
- [5] **Helmholtz H.**, “*Zur Geschichte des Princips der kleinsten Action*”, (Sitzungsber d. Akad. d. Wiss. z. Berlin), Crelle Journal, **100**, (1887), 225.
- [6] **Huygens C.**, *Treatise on Light*, traducido al inglés por S. P. Thompson, pp. 42-45 (1922).
- [7] **Lagrange J. L.**, “*Application de la méthode exposée dans le mémoire précédent à la solution de différents problèmes de dynamique*” (Miscellanea Taurinesia, 1760-61), Oeuvres, tome I.
- [8] **Landau L. D. and Lifshitz E. M.**, “*Quantum Mechanics, Non-Relativistic Theory*” (Addison-Wesley P. C., New York, Second Edition, 1965), PP. 158-187.
- [9] **Maupertuis L.**, “*Accord de différents lois de la nature*”, obras completas, en 4 tomos (1768). Essai de cosmologie, tomo I. Recherche des lois du mouvement, tomo IV.
- [10] **Schwinger J.**, *Phys. Rev.* **82**, (1951), 914.
- [11] **Sommerfeld A.**, *Ann. der Phys.*, **51**,(1916), 1.
- [12] **Wilson W.**, *Phil. Mag.*, **29**,(1915), 795.
- [12] **Yourgrau W., and Raw C. J. G.**, *Nature*, **181** (1958), 480.

Recibido el 18 de noviembre de 2003

Aceptado para su publicación el 18 de febrero de 2004