

! " #

!#\$%&# ' &&" () &!*&\$!"&

! " !# \$%#&! ' &() &!" "" #)&! " !#!") *+, !)\$!-! ..\$/&! .)) . #)0'&. !/.-! 1 & -!) ! "1 & " . 2333 2, ,3 45 54 45 4 5677 " .

treinta años aproximadamente, como una herramienta que además de atractiva por la vistosidad de las figuras que se generan, parece tener buenas perspectivas para modelar objetos y fenómenos de la naturaleza que se habían considerado fuera del alcance de la matemática.

Uno de los conjuntos más conocidos y representativos de esta geometría es el llamado triángulo de Sierpiński, presentado al mundo en el año 1916 por el matemático polaco **Waclaw Sierpiński** [12]. Entre los fractales clásicos, el triángulo de Sierpiński llamado también curva triangular de Sierpiński, ocupa un lugar destacado, parece tener propiedades excepcionales y surge, a veces de manera casi sorprendente, en diversos contextos de la matemática: en los sistemas dinámicos, la teoría de grafos, la matemática aplicada (en la fabricación de antenas de alta frecuencia, en particular en teléfonos celulares), e incluso en objetos tan antiguos como el triángulo de Pascal o el juego de las torres de Hanoi (véanse por ejemplo [13], [8], [4, pág. 309]).

En 1981, **J. E. Hutchinson** [5], basado en las ideas de **B. Mandelbrot** [6], expone una teoría muy formal y bien fundamentada de los que él llama conjuntos estrictamente autosimilares. En 1988, **M. Barnsley** [2], usando las ideas de Hutchinson expone un procedimiento para generar fractales como atractores de Sistemas Iterados de Funciones (SIF) y demuestra que todo atractor se puede “direccionar” mediante una función del espacio de Cantor, en el atractor, función que en el presente artículo llamamos la función de direccionamiento.

En 1990, **W. Debski** y **J. Mioduszewski** [3] estudiaron algunas propiedades topológicas de la curva triangular de Sierpiński. En 2007, **S. Sabogal** [11] presenta una caracterización algebraica de esta curva.

En el presente artículo se establece inicialmente una definición formal del triángulo de Sierpiński \mathcal{S} , como la intersección de cierta familia $\{\mathcal{S}_n\}_n$ de conjuntos (Definición 3.1), esto con base en la construcción clásica que se encuentra en la literatura; luego se demuestra que dicha intersección es efectivamente el atractor de un SIF (Proposición 3.2) y posteriormente, en la Proposición 3.3, se establece otra descripción de

\mathcal{S} , como la adherencia de la unión de una familia de conjuntos. En la mayor parte de la literatura que conocemos, estos hechos no se demuestran formalmente, a pesar de que se usan con bastante frecuencia. Solamente en [9] se establece formalmente \mathcal{S} como el atractor de un SIF, usando un lema ([9, Lemma 2.3]) cuya demostración allí se omite. Aquí se presenta y demuestra un lema un poco más general (Lema 2.7) para obtener a \mathcal{S} como el atractor de un SIF, y también se demuestra otra caracterización de \mathcal{S} como la adherencia de cierta unión de conjuntos, sin hacer uso de dicho lema.

Por otra parte, y este es el resultado original central del artículo, usando la función de direccionamiento, se presenta una caracterización de los puntos de las fronteras $\partial\mathcal{S}_n$, (Proposición 4.5), con lo cual se deduce que el triángulo de Sierpiński contiene puntos que no pertenecen a ninguna de las fronteras $\partial\mathcal{S}_n$. Esto es interesante ya que en general, al observar el procedimiento clásico para generar a \mathcal{S} , la tendencia natural es pensar que los **únicos** puntos que van a constituir a \mathcal{S} son justamente los de los conjuntos $\partial\mathcal{S}_n$, de modo que nuestro resultado, establece una propiedad contraintuitiva de la curva triangular de Sierpiński.

En la sección 2 de este trabajo, se precisan los principales conceptos, resultados y notaciones que se requieren en las siguientes secciones. En la sección 3 se establecen tres formas equivalentes de definir el triángulo de Sierpiński y en la sección 4 se presenta el resultado central del artículo (Proposición 4.5), que permite deducir la propiedad contraintuitiva de \mathcal{S} mencionada en el párrafo anterior.

2. Preliminares

Se presentan y precisan a continuación una serie de conceptos, notaciones y resultados necesarios para el fin que nos interesa. Las demostraciones que no se presentan aquí, se pueden encontrar en [2].

Dado N un entero positivo fijo, $N \geq 2$, se define el **espacio de los códigos** como el espacio métrico $(\Sigma^{\mathbb{N}}, d)$ donde $\Sigma = \{1, 2, \dots, N\}$

$$\Sigma^{\mathbb{N}} := \{\mathbf{x} = x_1x_2x_3\dots \mid x_i \in \Sigma, i \in \mathbb{N}\},$$

(los elementos de $\Sigma^{\mathbb{N}}$ se llaman **códigos** o **palabras semi-infinitas**), y la distancia entre los códigos $\mathbf{x} = x_1x_2x_3\dots$ e $\mathbf{y} = y_1y_2y_3\dots$ se define por

$$d(\mathbf{x}, \mathbf{y}) := \sum_{i=1}^{\infty} \frac{|x_i - y_i|}{(N+1)^i}. \tag{1}$$

Los espacios de Cantor se conocen en la literatura como los espacios topológicos que son homeomorfos al conjunto ternario de Cantor (sobre el intervalo cerrado $[0, 1]$ con la topología generada por la métrica usual de \mathbb{R} . Puesto que el conjunto ternario de Cantor se puede identificar con el conjunto de las sucesiones con los elementos 0 y 1, entonces el espacio de los códigos que se está aquí definiendo se puede identificar, para $N = 2$, con el conjunto ternario de Cantor y además la correspondiente métrica definida en (1), es equivalente a la métrica usual de \mathbb{R} , de modo que el espacio de códigos para $N = 2$ resulta homeomorfo al espacio de Cantor. Este resultado puede generalizarse para cualquier N entero positivo, $N > 2$, así que para cada $\Sigma = \{1, 2, \dots, N\}$ el espacio de códigos $\Sigma^{\mathbb{N}}$ no es otra cosa que un espacio de Cantor.

Un espacio métrico X se dice **completo** si toda sucesión de Cauchy en X , converge en X .

Sea (X, d) un espacio métrico; una función $f : X \rightarrow X$ se dice una **contracción** si existe $r \in \mathbb{R}$, $0 \leq r < 1$ tal que para cualesquiera $x, y \in X$ se tiene que

$$d(f(x), f(y)) \leq r \cdot d(x, y);$$

en tal caso r se dice un **factor de contracción** de f . No es difícil demostrar que toda contracción es continua.

Un espacio métrico X se dice **compacto** si toda sucesión en X admite una subsucesión convergente en X .

Notemos con $\mathcal{H}(X)$ la familia de todos los subconjuntos compactos no vacíos de X , es decir:

$$\mathcal{H}(X) := \{K \subseteq X \mid K \text{ es compacto, } K \neq \emptyset\}.$$

Se quiere ahora definir una métrica en el conjunto $\mathcal{H}(X)$, para lo cual procederemos por etapas.

Definición 2.1 (“Distancia” de punto a compacto). Sean (X, d) espacio métrico, $a \in X$ y

$K \in \mathcal{H}(X)$. Se define $\hat{d}(a, K)$ por:

$$\hat{d}(a, K) := \min \{d(a, x) \mid x \in K\}$$

(Véase la Fig. 1).

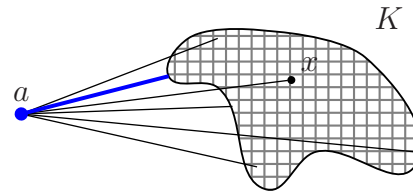


FIGURA 1: $\hat{d}(a, K)$

Definición 2.2 (“Distancia” entre compactos). Sean (X, d) espacio métrico y $A, B \in \mathcal{H}(X)$. Se define $\tilde{d}(A, B)$ por:

$$\begin{aligned} \tilde{d}(A, B) &:= \max \{ \hat{d}(a, B) \mid a \in A \} \\ &:= \max \{ \min \{ d(a, b) \mid b \in B \} \mid a \in A \}. \end{aligned}$$

(Véase la Figura 2).

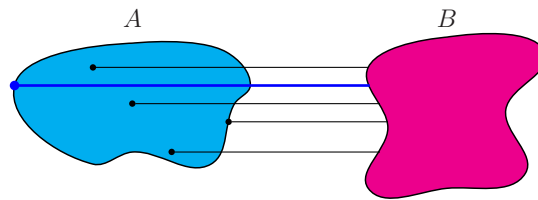


FIGURA 2: $\tilde{d}(A, B)$

Es de aclarar que \tilde{d} no es una métrica, ya que, en general, no se cumple que $\tilde{d}(A, B) = \tilde{d}(B, A)$.

Definición 2.3. Sean $A, B \in \mathcal{H}(X)$ se define $h(A, B)$ por:

$$h(A, B) =: \max \{ \tilde{d}(A, B), \tilde{d}(B, A) \}.$$

Proposición 2.4. h es una métrica sobre $\mathcal{H}(X)$.

Definición 2.5 (Métrica de Hausdorff). El espacio métrico $(\mathcal{H}(X), h)$ se llama **el espacio donde viven los fractales**. La métrica h se llama **métrica de Hausdorff**.

Como los elementos de $\mathcal{H}(X)$ son subconjuntos de X (es decir son elementos que a la vez son conjuntos), también se suele decir que $\mathcal{H}(X)$ es un **hiperespacio** de X .

La demostración del siguiente teorema puede consultarse en [2, Teorema 7.1] o en [1, Teorema

3.2.6]. Cabe anotar aquí que en el Teorema 7.1 de [2], la condición de que $(x_n)_n$ sea una sucesión de Cauchy, que aparece en la caracterización del conjunto A , se puede omitir, lo cual en efecto se hace en [1, Teorema 3.2.6].

Teorema 2.6. *Sea (X, d) un espacio métrico. $(\mathcal{H}(X), \mathbf{h})$ es completo si y sólo si (X, d) es completo. Además, si $(A_n)_n$ es una sucesión de Cauchy en $\mathcal{H}(X)$ y*

$$A = \lim_{n \rightarrow \infty} A_n$$

entonces A se puede caracterizar como sigue:

$$A = \{x \in X \mid \text{existe } (x_n)_n \text{ sucesión en } X, \text{ con } (x_n)_n \rightarrow x \text{ y } x_n \in A_n, \forall n\}.$$

El siguiente resultado, que se usará en la próxima sección, no aparece en la literatura que conocemos, razón por la cual se enuncia y demuestra a continuación.

Lema 2.7. *Sean (X, d) espacio métrico completo y $(A_n)_n$ sucesión de Cauchy en $\mathcal{H}(X)$ tal que:*

$$A_1 \supseteq A_2 \supseteq \dots \supseteq A_n \supseteq \dots$$

entonces

$$\lim_{n \rightarrow \infty} A_n = \bigcap_{n=1}^{\infty} A_n.$$

Demostración. Por el Teorema 2.6 sabemos que $\mathcal{H}(X)$ es completo y que

$$\begin{aligned} A &:= \lim_{n \rightarrow \infty} A_n \\ &= \{x \in X \mid \text{existe } (x_n)_n \text{ sucesión en } X \text{ con } (x_n)_n \rightarrow x \text{ y } x_n \in A_n, \forall n\}. \end{aligned}$$

Probemos entonces que $A = \bigcap_{n=1}^{\infty} A_n$. Sea $x \in A$. Existe $(x_n)_n$ sucesión en X , tal que $(x_n)_n \rightarrow x$ y $x_n \in A_n, \forall n$. Supongamos que $x \notin \bigcap_{n=1}^{\infty} A_n$, es decir, existe $M \in \mathbb{N}$ tal que $x \notin A_M$. Como A_M es compacto entonces es cerrado, luego $A_M = \overline{A_M}$, así que $x \notin \overline{A_M}$ lo cual significa que existe $\varepsilon > 0$ tal que $B(x; \varepsilon) \cap A_M = \emptyset$. Ahora, como $(x_n)_n \rightarrow x$, para $\varepsilon > 0$ existe $N \in \mathbb{N}$ tal que $d(x_n, x) < \varepsilon$ siempre que $n \geq N$.

²**Teorema del punto fijo para espacios métricos completos.** Sean (X, d) un espacio métrico completo y $f : X \rightarrow X$ una contracción de X . Entonces f tiene un único punto fijo, es decir, existe un único $p \in X$ tal que $f(p) = p$. Además, para cualquier $x \in X$ se tiene que:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f^{\circ n}(x) = p,$$

donde $f^{\circ n}$ representa la composición de f consigo misma, n veces.

Sea $T = \max\{M, N\}$. Se tiene: $d(x_T, x) < \varepsilon$, luego $x_T \in B(x; \varepsilon)$. Como $T \geq M$, $A_T \subseteq A_M$ y como $x_T \in A_T$ entonces $x_T \in A_M$, de modo que $x_T \in B(x; \varepsilon) \cap A_M = \emptyset$, lo cual es una contradicción.

Recíprocamente sea $x \in \bigcap_{n=1}^{\infty} A_n$, entonces $x \in A_n$ para todo n , y basta entonces considerar la sucesión constante $(x, x, \dots, x, \dots) \rightarrow x$ para concluir que $x \in A$. \square

Quizá el mecanismo más usado, y ya clásico, para construir fractales, es mediante los llamados sistemas iterados de funciones (SIF), concepto que se define a continuación.

Definición 2.8 (SIF). Un **sistema iterado de funciones (SIF)**, es una estructura de la forma $\{X; f_1, f_2, f_3, \dots, f_N\}$, donde X es un espacio métrico completo y cada $f_i : X \rightarrow X, i = 1, 2, \dots, N$, es una contracción en X .

Dado un SIF se puede obtener una contracción en el hiperespacio $\mathcal{H}(X)$, de la siguiente manera:

Lema 2.9. *Sean (X, d) un espacio métrico y $f_i : X \rightarrow X$ una contracción en X , con $i = 1, 2, 3, \dots, N$ ($N \in \mathbb{N}, N$ fijo). Si se define $F : \mathcal{H}(X) \rightarrow \mathcal{H}(X)$ por*

$$\begin{aligned} F(K) &:= f_1(K) \cup f_2(K) \cup f_3(K) \cup \dots \cup f_N(K) \\ &=: \bigcup_{i=1}^N f_i(K). \end{aligned}$$

Entonces F es una contracción.

Ahora, si (X, d) es completo entonces $F : \mathcal{H}(X) \rightarrow \mathcal{H}(X)$ es una contracción en un espacio métrico completo, de modo que se puede aplicar el teorema del punto fijo para espacios métricos completos² y se obtiene el siguiente teorema.

Teorema 2.10. *Dado $\{X; f_1, f_2, \dots, f_N\}$ un SIF, se define*

$$\begin{aligned} F : \mathcal{H}(X) &\longrightarrow \mathcal{H}(X) \\ K &\longmapsto F(K) =: \bigcup_{i=1}^N f_i(K), \end{aligned}$$

entonces existe un único $A \in \mathcal{H}(X)$ tal que

$$F(A) = A = \bigcup_{i=1}^N f_i(A). \text{ Además para cualquier } K \in \mathcal{H}(X) \text{ se tiene que}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} F^{\circ n}(K) = A.$$

El conjunto A se llama el **atractor** del SIF.

El atractor de un SIF determina un espacio de códigos, de acuerdo al número de contracciones del SIF.

Definición 2.11 (El espacio de códigos asociados a un SIF). Dado un SIF: $\{X; f_1, f_2, \dots, f_N\}$ se define su **espacio de códigos asociado** como el espacio métrico $\Sigma^{\mathbb{N}}$ donde $\Sigma = \{1, 2, \dots, N\}$.

El siguiente teorema es tomado de [2, pág. 123].

Teorema 2.12 (La función φ). Sean $\{X; w_1, \dots, w_N\}$ un SIF y A su atractor. Sea $\Sigma^{\mathbb{N}}$ el espacio de códigos asociado al SIF. Para cada $\alpha = \alpha_1 \alpha_2 \alpha_3 \dots \in \Sigma^{\mathbb{N}}, n \in \mathbb{N}$ y $x \in X$, sea

$$\varphi(\alpha) := \lim_{n \rightarrow \infty} w_{\alpha_1} \circ w_{\alpha_2} \circ \dots \circ w_{\alpha_n}(x).$$

Entonces $\varphi(\alpha)$ siempre existe, pertenece a A , es independiente de x , y la función:

$$\begin{aligned} \varphi &: \Sigma^{\mathbb{N}} \longrightarrow A \\ \alpha &\longmapsto \varphi(\alpha) \end{aligned}$$

es continua y sobre.

De esta manera, para cada punto del atractor de un SIF, se puede ahora definir lo que llamaremos una dirección del punto.

Definición 2.13 (Función de direccionamiento). Sean $\{X; w_1, \dots, w_n\}$ un SIF, $\Sigma^{\mathbb{N}}$ su espacio de códigos asociado y $\varphi: \Sigma^{\mathbb{N}} \rightarrow A$ la función definida en el teorema anterior. Sea $a \in A$; llamaremos una **dirección** de a , a cualquier elemento del conjunto,

$$\varphi^{-1}(a) := \{\alpha \in \Sigma^{\mathbb{N}} \mid \varphi(\alpha) = a\}.$$

El conjunto $\varphi^{-1}(a)$ lo llamaremos el **conjunto de las direcciones de a** y la función φ la llamaremos la **función de direccionamiento** del atractor del SIF.

Dos observaciones sobre la función de direccionamiento: La función φ permite, entre otras cosas, asignar a cada punto del atractor, un código semi-infinito, lo cual a su vez puede facilitar la caracterización de ciertos subconjuntos del fractal como se hará en la sección 4 para el triángulo de Sierpiński. Por otra parte, recordando que cada espacio de códigos es homeomorfo al espacio de Cantor, la función de direccionamiento constituye una forma de obtener los conjuntos fractales como cocientes topológicos del espacio de Cantor.

En efecto: si F es un subconjunto cerrado de $\Sigma^{\mathbb{N}}$, y dado que $\Sigma^{\mathbb{N}}$ es compacto, entonces F es también compacto; de esta manera para la función $\varphi: \Sigma^{\mathbb{N}} \rightarrow A$ definida en el Teorema 2.12, se tiene que $\varphi(F)$ es un subconjunto compacto de A (la imagen continua de un compacto es un compacto); además, puesto que A es Hausdorff (por ser un espacio métrico), entonces $\varphi(F)$ es un cerrado de A (un subconjunto compacto de un espacio Hausdorff, es cerrado [14, Theorem 17.5]). De esta manera la función φ es cerrada de modo que se tiene una función continua, sobre y cerrada; se puede entonces aplicar [14, Teorema 9.2] para concluir que A es un cociente (topológico) del espacio de Cantor. Por supuesto esta conclusión también se puede obtener como una consecuencia directa del Teorema 30.7 de [14], el cual establece que todo espacio métrico compacto es una imagen continua del espacio de Cantor; sin embargo en el Teorema 2.12 se muestra explícitamente una función de cociente entre el espacio de Cantor $\Sigma^{\mathbb{N}}$ y el atractor A .

Ejemplo 2.14.

- (1) Consideremos el SIF: $\{[0, 1]; w_1, w_2\}$ donde $w_1(x) = \frac{1}{3}x$, $w_2(x) = \frac{1}{3}x + \frac{2}{3}$. El atractor de este SIF es el espacio de Cantor \mathcal{C} , y su función de direccionamiento, $\varphi: \Sigma^{\mathbb{N}} \rightarrow \mathcal{C}$, donde $\Sigma = \{1, 2\}$. Calculemos por ejemplo $\varphi(\overline{12})$; ($\overline{12} = 1222\dots$).

$$\varphi(\overline{12}) = \lim_{n \rightarrow \infty} w_1 \circ w_2 \circ w_2 \circ \dots \circ w_2(1) = \lim_{n \rightarrow \infty} w_1(1) = w_1(1) = \frac{1}{3} \in \mathcal{C}$$

Luego $\overline{12}$ es dirección de $\frac{1}{3}$.

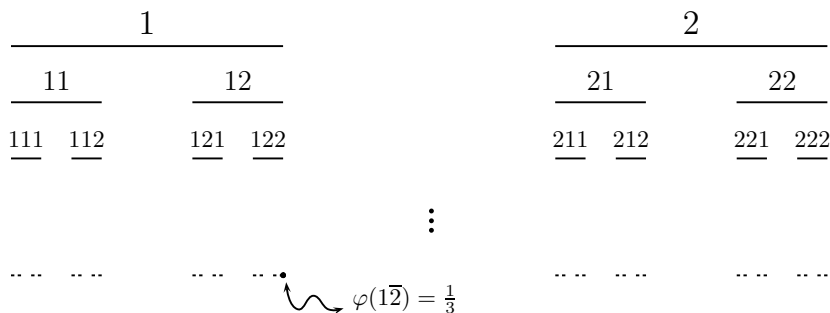


FIGURA 3: Espacio de códigos asociado con el conjunto de Cantor.

- (2) El atractor del SIF: $\left\{I \times I; \frac{1}{3}z, \frac{1}{3}ze^{i\pi/3} + \frac{1}{3}, \frac{1}{3}ze^{-i\pi/3} + \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{6}i, \frac{1}{3}z + \frac{2}{3}\right\}$, se llama la **curva de Koch**, que notaremos \mathcal{K} . Entonces

$$\varphi: \Sigma^{\mathbb{N}} \rightarrow \mathcal{K} \quad \text{con} \quad \Sigma = \{1, 2, 3, 4\}.$$

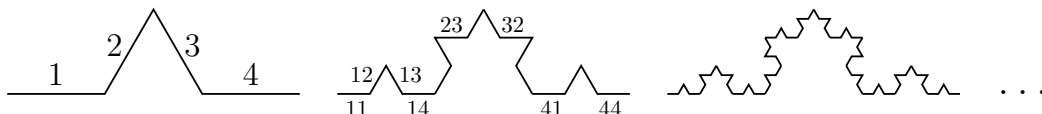


FIGURA 4: Espacio de códigos asociado con la curva de Koch.

$$\begin{aligned} \text{En este caso, por ejemplo } \varphi^{-1}\left(\frac{1}{3}, 0\right) &= \{1\bar{4}, 2\bar{1}\}, \\ \varphi^{-1}\left(\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{6}\right) &= \{2\bar{4}, 3\bar{1}\}, \quad \varphi^{-1}(0, 0) = \{\bar{1}\}. \end{aligned}$$

Para finalizar esta sección de preliminares, se demuestran dos lemas que se usarán en la sección 4.

Lema 2.15. Sean A el atractor de un SIF $\{X; f_1, f_2, \dots, f_N\}$ y $\varphi: \Sigma^{\mathbb{N}} \rightarrow A$ la correspondiente función de direccionamiento. Entonces para todo $\alpha = \alpha_1\alpha_2\alpha_3 \dots \in \Sigma^{\mathbb{N}}$ se cumple:

$$\varphi(\alpha_1\alpha_2\alpha_3 \dots) = f_{\alpha_1}(\varphi(\alpha_2\alpha_3 \dots)).$$

Demostración. En efecto, para $x \in X$:

$$\begin{aligned} \varphi(\alpha_1\alpha_2\alpha_3 \dots) &= \lim_{n \rightarrow \infty} f_{\alpha_1} \circ f_{\alpha_2} \circ f_{\alpha_3} \circ \dots \circ f_{\alpha_n}(x) \\ &= f_{\alpha_1}(\lim_{n \rightarrow \infty} f_{\alpha_2} \circ f_{\alpha_3} \circ \dots \circ f_{\alpha_n}(x)) \\ &= f_{\alpha_1}(\varphi(\alpha_2\alpha_3 \dots)), \end{aligned}$$

pues f_{α_1} es continua (por ser contracción). \square

Lema 2.16. Sean $\{X; f_1, f_2, \dots, f_N\}$ un SIF cuyas contracciones son inyectivas y $\varphi: \Sigma^{\mathbb{N}} \rightarrow A$ la correspondiente función de direccionamiento. Entonces para todo par $\alpha = \alpha_1\alpha_2\alpha_3 \dots$, $\beta = \alpha_1\beta_2\beta_3 \dots \in \Sigma^{\mathbb{N}}$ se tiene

$$\varphi(\alpha_1\alpha_2\alpha_3 \dots) = \varphi(\alpha_1\beta_2\beta_3 \dots)$$

si y sólo si

$$\varphi(\alpha_2\alpha_3 \dots) = \varphi(\beta_2\beta_3 \dots).$$

Demostración. \Rightarrow) Si

$$\varphi(\alpha_1\alpha_2\alpha_3 \dots) = \varphi(\alpha_1\beta_2\beta_3 \dots),$$

aplicando el lema anterior se tiene

$$f_{\alpha_1}(\varphi(\alpha_2\alpha_3 \dots)) = f_{\alpha_1}(\varphi(\beta_2\beta_3 \dots)).$$

Como f_{α_1} es inyectiva se concluye que $\varphi(\alpha_2\alpha_3 \dots) = \varphi(\beta_2\beta_3 \dots)$.

\Leftarrow) Aplicando f_{α_1} en la hipótesis y luego usando el lema anterior, se obtiene el resultado. \square

3. Definiciones formales de \mathcal{S}

La forma más usada de construir el triángulo de Sierpiński consiste en partir de un triángulo equilátero de lado 1, junto con su interior, unir los puntos medios de los lados del triángulo de modo que se forman cuatro triángulos de los cuales se elimina el triángulo central. Luego, en cada uno de los tres triángulos que quedan se repite la construcción (unir los puntos medios de los lados y eliminar el triángulo central), obteniéndose nueve triángulos más pequeños (véase la Figura 5), en cada uno de los cuales se repite la construcción para obtener 27 triángulos aún más pequeños y así sucesivamente; se determina entonces una sucesión de conjuntos $\mathcal{S}_0, \mathcal{S}_1, \mathcal{S}_2, \dots, \mathcal{S}_n, \dots$

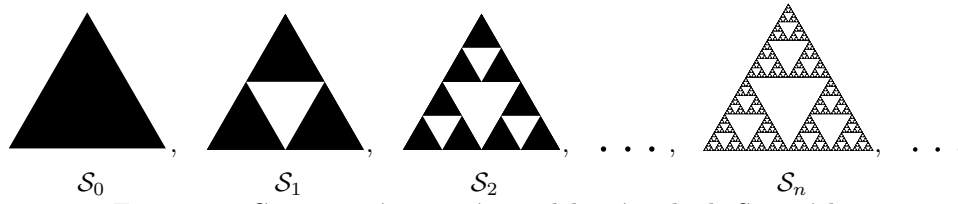


FIGURA 5: Construcción geométrica del triángulo de Sierpiński.

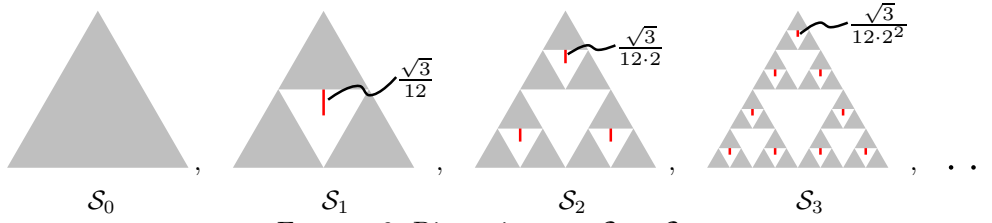


FIGURA 6: Distancia entre \mathcal{S}_n y \mathcal{S}_{n+1} .

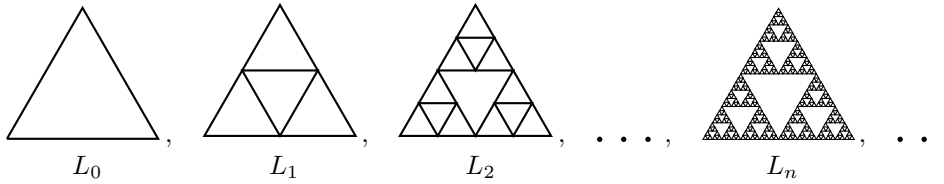


FIGURA 7: La sucesión $(L_n)_n$.

Formalizamos de la siguiente manera:

Definición 3.1. Siendo $(\mathcal{S}_n)_n$ la sucesión obtenida anteriormente, se define el **triángulo de Sierpiński** que notaremos \mathcal{S} , como la intersección de la familia $\{\mathcal{S}_n \mid n \in \mathbb{N}\}$, es decir:

$$\mathcal{S} := \bigcap_{n=0}^{\infty} \mathcal{S}_n.$$

Ahora, si se considera el SIF $\mathbb{S} := \{\mathbb{R}^2; f_1, f_2, f_3\}$ donde $f_1(z) = \frac{1}{2}z$, $f_2(z) = \frac{1}{2}z + \frac{1}{2}$, $f_3(z) = \frac{1}{2}z + \frac{1}{4} + \frac{\sqrt{3}}{4}i$, y se toma como conjunto inicial \mathcal{S}_0 el triángulo (junto con su interior) de vértices $(0, 0)$, $(1, 0)$ y $(\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2})$, se puede comprobar, haciendo los cálculos y aplicando inducción matemática que la sucesión $(F^{on}(\mathcal{S}_0))_n$ (véase el Teorema 2.10), es la misma sucesión $(\mathcal{S}_n)_n$ de la Definición 3.1.

Obsérvese que cada \mathcal{S}_n es compacto no vacío y que además:

(i) $\mathcal{S}_0 \supseteq \mathcal{S}_1 \supseteq \mathcal{S}_2 \supseteq \dots \supseteq \mathcal{S}_n \supseteq \dots$

(ii) $(\mathcal{S}_n)_n$ es una sucesión de Cauchy en $\mathcal{H}(\mathbb{R}^2)$.

En efecto:

$$\begin{aligned} h(\mathcal{S}_0, \mathcal{S}_1) &= \tilde{d}(\mathcal{S}_0, \mathcal{S}_1) = \frac{\sqrt{3}}{12} \\ h(\mathcal{S}_1, \mathcal{S}_2) &= \tilde{d}(\mathcal{S}_1, \mathcal{S}_2) = \frac{\sqrt{3}}{12 \cdot 2} \\ h(\mathcal{S}_2, \mathcal{S}_3) &= \tilde{d}(\mathcal{S}_2, \mathcal{S}_3) = \frac{\sqrt{3}}{12 \cdot 2^2} \\ &\dots \end{aligned}$$

$$h(\mathcal{S}_n, \mathcal{S}_{n+1}) = \tilde{d}(\mathcal{S}_n, \mathcal{S}_{n+1}) = \frac{\sqrt{3}}{12 \cdot 2^n}$$

de modo que si $m \geq n$ se tiene:

$$\begin{aligned} h(\mathcal{S}_n, \mathcal{S}_m) &\leq \sum_{j=n}^{m-1} h(\mathcal{S}_j, \mathcal{S}_{j+1}) \\ &= \frac{\sqrt{3}}{12 \cdot 2^n} + \frac{\sqrt{3}}{12 \cdot 2^{n+1}} + \dots + \frac{\sqrt{3}}{12 \cdot 2^m} \\ &= \frac{\sqrt{3}}{12} \left(\frac{1}{2^n} + \frac{1}{2^{n+1}} + \dots + \frac{1}{2^m} \right) \rightarrow 0, \end{aligned}$$

cuando $n, m \rightarrow \infty$. Así teniendo en cuenta (i), (ii) y que \mathbb{R}^2 es completo, se puede aplicar el Lema 2.7 para obtener:

Proposición 3.2. *El triángulo de Sierpiński es el atractor del SIF \mathcal{S} .*

Por el Teorema 2.10 el atractor de un SIF es independiente del compacto inicial que se tome. Si cambiamos el conjunto inicial \mathcal{S}_0 , por el triángulo L_0 de vértices $(0, 0)$, $(1, 0)$ y $(\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2})$, pero ahora **sin su interior** (es decir $L_0 = \partial\mathcal{S}_0$), la sucesión que se obtiene se ilustra en la Figura 7.

La tendencia general es pensar que \mathcal{S} es la unión de la familia $\{L_n \mid n = 0, 1, 2, \dots\}$. Sin embargo esto **no** es cierto. Se probará a continuación que en realidad \mathcal{S} es la adherencia de dicha unión, y en la siguiente sección se probará que existen puntos de \mathcal{S} que **no** pertenecen a $\bigcup_{n=0}^{\infty} L_n$.

Proposición 3.3. $\mathcal{S} = \overline{\bigcup_{n=0}^{\infty} L_n}$

Demostración. Sea $\mathfrak{s} \in \mathcal{S}$. Usando la función de direccionamiento $\varphi : \Sigma^{\mathbb{N}} \rightarrow \mathcal{S}$ asociada al SIF \mathcal{S} , sabemos que existe un código $\alpha \in \Sigma^{\mathbb{N}}$ tal que $\varphi(\alpha) = \mathfrak{s}$, (φ es sobre, Teorema 2.12), de modo que $\lim_{n \rightarrow \infty} f_{\alpha_1} \circ \dots \circ f_{\alpha_n}(x) = \mathfrak{s}, \forall x \in \mathbb{R}^2$. Para probar que $\mathfrak{s} \in \bigcup_{n=0}^{\infty} L_n$ tomemos $\epsilon > 0$ y veamos que $B(\mathfrak{s}; \epsilon) \cap \left(\bigcup_{n=0}^{\infty} L_n\right) \neq \emptyset$. Observemos que:

$$\begin{aligned} F(L_0) &= f_1(L_0) \cup f_2(L_0) \cup f_3(L_0) \\ &= \{f_1(x) \mid x \in L_0\} \\ &\quad \cup \{f_2(x) \mid x \in L_0\} \cup \{f_3(x) \mid x \in L_0\} \\ &= \{f_i(x) \mid x \in L_0, i \in \{1, 2, 3\}\}, \end{aligned}$$

$$F^{\circ 2}(L_0) = \{f_{i_1} \circ f_{i_2}(x) \mid x \in L_0, i_1, i_2 \in \{1, 2, 3\}\},$$

y, en general,

$$F^{\circ n}(L_0) = \{f_{i_1} \circ \dots \circ f_{i_n}(x) \mid x \in L_0, i_1, \dots, i_n \in \{1, 2, 3\}\}.$$

Sea $x_0 \in L_0$. Puesto que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f_{\alpha_1} \circ \dots \circ f_{\alpha_n}(x) = \mathfrak{s},$$

entonces para $\epsilon > 0$ existe $N \in \mathbb{N}$ tal que si $n \geq N$ entonces $f_{\alpha_1} \circ \dots \circ f_{\alpha_n}(x_0) \in B(\mathfrak{s}; \epsilon)$. De esta

manera tenemos que, $\forall n \geq N$,

$$\begin{aligned} f_{\alpha_1} \circ \dots \circ f_{\alpha_n}(x_0) &\in B(\mathfrak{s}; \epsilon) \cap F^{\circ n}(L_0) \\ &= B(\mathfrak{s}; \epsilon) \cap L_n \\ &\subseteq B(\mathfrak{s}; \epsilon) \cap \left(\bigcup_{n=0}^{\infty} L_n\right). \end{aligned}$$

Para la otra contención demostramos en primer lugar que

$$\bigcup_{n=0}^{\infty} L_n \subseteq \mathcal{S},$$

es decir que $\bigcup_{n=0}^{\infty} L_n \subseteq \bigcap_{n=0}^{\infty} \mathcal{S}_n$. Usaremos los siguientes hechos:

- (1) $L_n \subseteq \mathcal{S}_n$ para todo $n = 0, 1, 2, 3, \dots$
- (2) $\mathcal{S}_0 \supseteq \mathcal{S}_1 \supseteq \mathcal{S}_2 \supseteq \dots \supseteq \mathcal{S}_n \supseteq \dots$
- (3) $L_0 \subseteq L_1 \subseteq L_2 \subseteq \dots \subseteq L_n \subseteq \dots$

Sea $x \in \bigcup_{n=0}^{\infty} L_n$. Existe $m \in \mathbb{N}$ tal que $x \in L_m$.

Por (3) se tiene que $x \in L_n$, para todo $n \geq m$. Por (1) se tiene que $x \in \mathcal{S}_n$, para todo $n \geq m$. Por (2) se tiene que $x \in \mathcal{S}_n$, para todo $n \leq m$. De esta manera $x \in \bigcap_{n=0}^{\infty} \mathcal{S}_n$, con lo cual $\bigcup_{n=0}^{\infty} L_n \subseteq \mathcal{S}$.

Como \mathcal{S} es cerrado y puesto que la adherencia de un conjunto es el “menor” cerrado que lo contiene, se concluye que $\overline{\bigcup_{n=0}^{\infty} L_n} \subseteq \mathcal{S}$. \square

4. \mathcal{S} es mucho más de lo que parece

Se probará en esta sección que $\mathcal{S} \neq \bigcup_{n=0}^{\infty} L_n$, mediante una caracterización de los puntos que están en cada conjunto $L_n = \partial\mathcal{S}_n$. Para esto se establecerán algunos lemas previos. Hagamos $p = (0, 0)$, $q = (1, 0)$ y $r = (\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2})$ los puntos fijos de las contracciones f_1 , f_2 y f_3 respectivamente, del SIF \mathcal{S} . Sea L_{pq} el segmento que une p y q . Se definen L_{qr} y L_{pr} de manera análoga (Figura 8). Denotemos ahora Σ_{13} el siguiente conjunto de códigos:

$$\Sigma_{13} := \{\alpha \in \Sigma^{\mathbb{N}} \mid \alpha_i \in \{1, 3\}, \forall i \in \mathbb{N}\}.$$

Lema 4.1. $\varphi(\Sigma_{13}) = L_{pr}$.

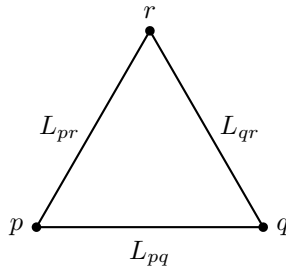


FIGURA 8 : Los segmentos L_{pq} , L_{qr} y L_{pr} .

Demostración. Sea $\alpha = \alpha_1\alpha_2 \dots \in \Sigma_{13}$. Como $f_1(L_{pr}) \cup f_3(L_{pr}) = L_{pr}$, entonces L_{pr} es el atractor del SIF $\{\mathbb{R}^2; f_1, f_3\}$; esto implica que para todo $x \in \mathbb{R}^2$ se cumple,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f_{\alpha_1} \circ \dots \circ f_{\alpha_n}(x) \in L_{pr},$$

de aquí que $\varphi(\alpha) \in L_{pr}$ y por tanto $\varphi(\Sigma_{13}) \subseteq L_{pr}$. Para la otra contención demosetremos antes que si

$$\alpha \notin \Sigma_{13} \quad \text{entonces} \quad \varphi(\alpha) \notin L_{pr}. \quad (2)$$

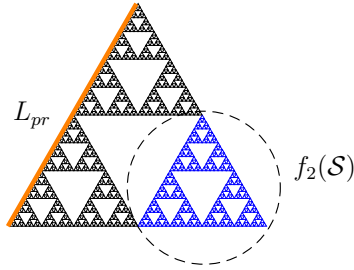


FIGURA 9:

Si $\alpha \notin \Sigma_{13}$ es porque existe $k \in \mathbb{N}$ tal que $\alpha_k = 2$ (asumimos además que tal k es el menor entero positivo tal que $\alpha_k = 2$) de modo que, usando el Lema 2.15,

$$\varphi(\alpha_k\alpha_{k+1}\dots) = f_2(\varphi(\alpha_{k+1}\alpha_{k+2}\dots)) \in f_2(\mathcal{S}),$$

de donde podemos concluir que

$$\varphi(\alpha_k\alpha_{k+1}\dots) \notin L_{pr}$$

(véase la Figura 9), de lo cual se sigue que

$$\varphi(\alpha_1\alpha_2 \dots \alpha_k\alpha_{k+1}\dots) \notin L_{pr},$$

es decir, $\varphi(\alpha) \notin L_{pr}$, como se quería ver.

Tomemos ahora $x \in L_{pr}$. Como φ es sobreyectiva, existe $\alpha \in \Sigma^{\mathbb{N}}$ tal que $\varphi(\alpha) = x$, de modo que $\varphi(\alpha) \in L_{pr}$. Usando (2) se concluye que $\alpha \in \Sigma_{13}$, de donde $x = \varphi(\alpha) \in \varphi(\Sigma_{13})$ lo cual

demuestra que $L_{pr} \subseteq \varphi(\Sigma_{13})$, la contención que faltaba. \square

De manera análoga se puede demostrar el siguiente lema:

Lema 4.2. $\varphi(\Sigma_{12}) = L_{pq}$ y $\varphi(\Sigma_{23}) = L_{qr}$.

Los dos lemas anteriores permiten entonces escribir el siguiente:

Lema 4.3. $L_0 = L_{pq} \cup L_{qr} \cup L_{pr} = \varphi(\Sigma_{12}) \cup \varphi(\Sigma_{23}) \cup \varphi(\Sigma_{13})$.

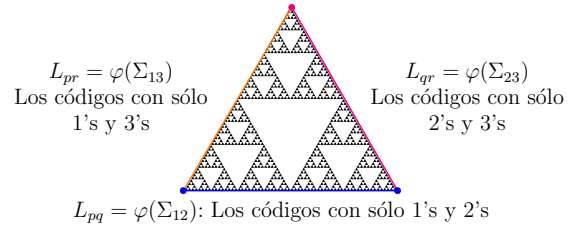


FIGURA 10: Los códigos de L_{pq} , L_{qr} y L_{pr} .

Ahora fijémonos en $L_1 = F(L_0)$ que es la unión de L_0 con el triángulo de vértices $(\frac{1}{2}, 0)$, $(\frac{3}{4}, \frac{\sqrt{3}}{4})$ y $(\frac{1}{4}, \frac{\sqrt{3}}{4})$. Sea $x_0 \in L_1 - L_0$. Un código para x_0 es de una de las siguientes tres formas:

- $\alpha = 1\beta$, donde $\beta \in \Sigma_{23}$
- $\alpha = 2\beta$, donde $\beta \in \Sigma_{13}$
- $\alpha = 3\beta$, donde $\beta \in \Sigma_{12}$

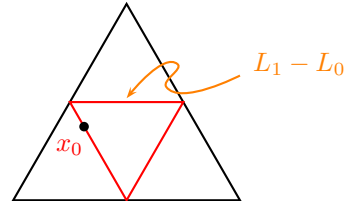


FIGURA 11: Gráfico de $L_1 - L_0$.

Podemos suponer, sin pérdida de generalidad, que x_0 es $\alpha = 1\beta$, con $\beta \in \Sigma_{23}$ (véase la Figura 11). Como $x_0 \in f_1(\mathcal{S})$ y $x_0 \notin L_0$, entonces $x_0 \notin f_2(\mathcal{S})$ y $x_0 \notin f_3(\mathcal{S})$. Si x_0 tuviera otro código que inicia también con 1, digamos 1δ , entonces:

$$x_0 = \varphi(1\beta) = \varphi(1\delta).$$

Puesto que f_1 es inyectiva, podemos aplicar el Lema 2.16 y escribir:

$$\varphi(\beta) = \varphi(\delta)$$

es decir β y δ son códigos del mismo punto. Como $\beta \in \Sigma_{23}$ entonces $\varphi(\beta) \in \varphi(\Sigma_{23}) = L_{qr}$, luego $\varphi(\delta) \in L_{qr}$ de donde $\delta \in \Sigma_{23}$.

Denotemos $1\Sigma_{23}$ el conjunto de los códigos de la forma 1β , donde $\beta \in \Sigma_{23}$. Lo que se ha probado es sencillamente que los códigos de x_0 necesariamente pertenecen a $1\Sigma_{23}$.

De manera análoga se puede probar que si x_0 es $\alpha = 2\beta$ donde $\beta \in \Sigma_{13}$ entonces los códigos de x_0 pertenecen a $2\Sigma_{13}$ (conjunto de códigos de la forma $2\beta, \beta \in \Sigma_{13}$) y que si x_0 es $\alpha = 3\beta$ donde $\beta \in \Sigma_{12}$, entonces los códigos de x_0 pertenecen a $3\Sigma_{12}$ (conjunto de códigos de la forma $3\beta, \beta \in \Sigma_{12}$). Por tanto podemos concluir:

$$L_1 - L_0 = \varphi(1\Sigma_{23}) \cup \varphi(2\Sigma_{13}) \cup \varphi(3\Sigma_{12}).$$

(Véase la Figura 12).

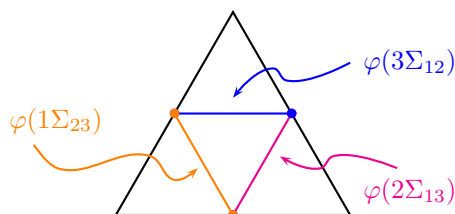


FIGURA 12: Gráfico de

$$L_1 - L_0 = \varphi(1\Sigma_{23}) \cup \varphi(2\Sigma_{13}) \cup \varphi(3\Sigma_{12})$$

Los razonamientos anteriores, junto con el Lema 4.3 permiten escribir lo siguiente:

Lema 4.4. $L_1 = \varphi(\Sigma_{12}) \cup \varphi(\Sigma_{23}) \cup \varphi(\Sigma_{13}) \cup \varphi(1\Sigma_{23}) \cup \varphi(2\Sigma_{13}) \cup \varphi(3\Sigma_{12})$.

Procediendo inductivamente y con cuidado se concluye que si $x_0 \in L_n$ entonces los códigos de x_0 son de la forma:

$$\alpha = \alpha_1\alpha_2 \dots \alpha_k\beta, \quad (3)$$

donde $\beta \in \Sigma_{12} \cup \Sigma_{23} \cup \Sigma_{13}$ para algún $k \in \mathbb{N}$ y donde $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_k \in \{1, 2, 3\}$.

Recíprocamente si un código de x_0 es de la forma (3), se tendrá:

$$\begin{aligned} x_0 = \varphi(\alpha) &= \varphi(\alpha_1\alpha_2 \dots \alpha_k\beta) \\ &= f_{\alpha_1} \circ f_{\alpha_2} \circ \dots \circ f_{\alpha_k}(\varphi(\beta)) \in F^{\circ k}(L_0) = L_k. \end{aligned}$$

Expresándolo en palabras lo que se ha demostrado es que los puntos de los conjuntos L_n son aquellos cuyos códigos inician con un código finito cuyas cifras son 1, 2 o 3 ($\alpha_1\alpha_2 \dots \alpha_k$), y luego sigue una “cola” en la cual solamente aparecen dos cifras: ó 1 y 2, ó 2 y 3, ó 1 y 3.

Los razonamientos anteriores permiten finalmente escribir el resultado principal de esta sección, el cual constituye una caracterización de los puntos del conjunto $\bigcup_{n=0}^{\infty} L_n$ y permitirá además concluir que nuestro fractal distinguido \mathcal{S} , contiene puntos que **no** están en dicha unión.

Proposición 4.5. $x_0 \in \bigcup_{n=0}^{\infty} L_n$ si y sólo si existe $k \in \mathbb{N}$ tal que, los códigos de x_0 son de la forma.

$$\alpha = \alpha_1\alpha_2 \dots \alpha_k\beta, \quad (4)$$

donde

$$\beta \in \Sigma_{12} \cup \Sigma_{23} \cup \Sigma_{13}, \quad \alpha_i \in \{1, 2, 3\}, \quad 1 \leq i \leq k.$$

Nota. En (4) el código finito $\alpha_1\alpha_2 \dots \alpha_k$ puede ser el código “vacío”, es decir, sin cifras, que sería el caso para los puntos de L_0 .

Recordemos ahora la función de direccionamiento $\varphi : \Sigma^{\mathbb{N}} \rightarrow \mathcal{S}$; ella nos indica que **para todo** $\alpha \in \Sigma^{\mathbb{N}}$, $\varphi(\alpha) \in \mathcal{S}$. Claramente existen códigos en $\Sigma^{\mathbb{N}}$ que no son de la forma (4), por ejemplo, entre muchos otros, los siguientes: $123123\overline{123}$, $112321\overline{321}$, $333111213\overline{111213}$. Veamos un ejemplo haciendo un cálculo más preciso:

$$\text{Sea } x_0 = \varphi(\overline{123}) = ?$$

Calculemos la composición $f_1 \circ f_2 \circ f_3$:

$$\begin{aligned} f_1 \circ f_2 \circ f_3(x) &= f_1 \left(f_2 \left(\frac{1}{2}x + \frac{1}{4} + \frac{\sqrt{3}}{4}i \right) \right) \\ &= f_1 \left(\frac{1}{2} \left(\frac{1}{2}x + \frac{1}{4} + \frac{\sqrt{3}}{4}i \right) + \frac{1}{2} \right) \\ &= f_1 \left(\frac{1}{4}x + \frac{5}{8} + \frac{\sqrt{3}}{8}i \right) \\ &= \frac{1}{8}x + \frac{5}{16} + \frac{\sqrt{3}}{16}i \end{aligned}$$

El punto fijo de la contracción $f_1 \circ f_2 \circ f_3$ es $x_f = \frac{5}{14} + \frac{\sqrt{3}}{14}i$, de modo que

$$\begin{aligned}\varphi(\overline{123}) &= \lim_{n \rightarrow \infty} f_1 \circ f_2 \circ f_3 \circ \dots \circ f_1 \circ f_2 \circ f_3(x_f) \\ &= \frac{5}{14} + \frac{\sqrt{3}}{14}i.\end{aligned}$$

Por lo tanto $x_0 = \frac{5}{14} + \frac{\sqrt{3}}{14}i$ es un punto que pertenece al triángulo de Sierpiński pero **no** pertenece a $\bigcup_{n=0}^{\infty} L_n$. Finalmente, el lector puede comprobar que para tal x_0 , el conjunto $D = \bigcup_{n=0}^{\infty} F^{on}(\{x_0\})$ es un conjunto **denso** en el triángulo de Sierpiński y tal que, **ninguno** de sus puntos pertenece a la unión de la familia $\{L_n\}_{n=0}^{\infty}$.

Agradecimientos. Los autores desean agradecer al Doctor **Héctor Méndez Lango** de la Universidad Nacional Autónoma de México, por sus invaluable ideas que hicieron posible la escritura de este artículo.

Referencias

- [1] **G. Arenas & S.M. Sabogal.** *Una introducción a la geometría fractal.* Universidad Industrial de Santander, Bucaramanga, Colombia, (por publicar). http://matematicas.uis.edu.co/libros/l_geofrac.pdf
- [2] **M. Barnsley.** *Fractals Everywhere.* Second Edition. Academic Press, Inc., 1993.
- [3] **W. Debski & J. Mioduszewski.** *Simple plane images of the Sierpiński triangular curve are nowhere dense,* Colloquium Mathematicum, **LIX** (1990), 125–140.
- [4] **K. J. Falconer.** *Fractal Geometry. Mathematical Foundations and Applications.* Second Edition, John Wiley and Sons, 2003.
- [5] **J. E. Hutchinson.** *Fractals and Self-Similarity.* Indiana University Journal of Mathematics **30** (1981), 713–747.
- [6] **B. Mandelbrot.** *Les Objets Fractals: Forme, Hasard et Dimension.* Flammarion, 1975.
- [7] **H. Mesa.** *El triángulo de Sierpiński.* Monografía de grado, Licenciatura en Matemáticas, UIS, Bucaramanga, 2001.
- [8] **H. Mesa.** *Fractales, grafos y códigos.* Revista Integración, **19**(1) (2001), 13–21.
- [9] **M. Peruggia.** *Discrete Iterated function Systems,* A. K. Peters Ltd, 1993.
- [10] **G. N. Rubiano.** *Fractales para profanos.* Editorial Unibiblos, 2002.
- [11] **S. Sabogal,** *Algebraic representation of continua.* Revista Colombiana de Matemáticas, **41** (2007), 253–262.
- [12] **W. Sierpiński.** *Sur une curve dont tout point est un point de ramification.* Prace Mat.– Fiz bf 27 (1916), 77–86.
- [13] **I. Stewart.** *La ubicua curva de Sierpiński.* Rev. Investigación y Ciencia, octubre (1999), 86–87.
- [14] **S. Willard.** *General Topolgy.* Addison-Wesley, Publishing Company, 1970.

Recibido el 14 de mayo de 2009

Aceptado para su publicación el 10 de agosto de 2009